บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่พัฒนากระบวนการคิดของมนุษย์ ทำให้มีความคิดอย่างเป็นระบบและสามารถคิดวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างมีคุณภาพ ซึ่งคณิตศาสตร์มีพัฒนาการมาอย่างต่อเนื่องทั้งด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ ซึ่งผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และพบว่ามีงานวิจัยที่น่าสนใจดังนี้

ในปีค.ศ. 1965 ซาเดห์ เสนอแนวคิดในการนิยามเซตวิภัชนัย (fuzzy set) จากฟังก์ชันสมาชิกในทำนองเดียวกับการกล่าวถึงเซตดั้งเดิมด้วยฟังก์ชันบ่งชี้เฉพาะ โดยใส่เงื่อนไขเพิ่มเติมคือค่าระดับความเป็นสมาชิก (Graded membership) สามารถเป็นได้ตั้งแต่ 0 ถึง 1 แทนที่จะมีค่าแค่เพียง 0 กับ 1 อย่างเซตดั้งเดิม กล่าวคือ กำหนดให้ A เป็นเซตดั้งเดิม (เป็นเซตที่พิจารณา) ของเอกภพสัมพัทธ์ U เซตวิภัชนัย A นิยามโดย $A=\{(x,u_A(x)) \mid x\in A, u_A(x)\in[0,1]\}$ เรียก $u_A : A\to[0,1]$ นี้ว่า ฟังก์ชันสมาชิก (Membership function) ของเซตวิภัชนัย A (Zadeh, 1965)

ในเวลาต่อมา อตานาสซอฟ ได้พัฒนาแนวคิดของซาเดห์และเสนอแนวคิดเกี่ยวกับวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนเซตไว้ดังนี้ วิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนเซต $\tilde{A}$ ในเซต X นิยามโดย $\tilde{A}=\{(x,u_A(x),v_A(x)) \mid x\in X\}$ โดยที่ $u_A : A\to[0,1]$ และ $v_A : A\to[0,1]$ และมีเงื่อนไขว่า $0\le u_A, v_A\le 1$ สำหรับทุก ๆ $x\in X$ (Atanassov, 1994)

ในปีค.ศ. 1975 มาคราโมซิลและมิคาเลค นำเสนอเกี่ยวกับหลักการของระยะทางเชิงวิภัชนัย ดังนี้ ระยะทางเชิงวิภัชนัย R บนเซต X เป็นเซตวิภัชนัยซึ่งส่งผลคูณคาร์ทีเซียน $X\times X\times\mathbb{R}$ ไปบนช่วงปิด $[0,1]$ โดยฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ f_R มีสมบัติดังนี้ สำหรับทุก ๆ $x,y\in X$

1. $f_R(x,y,\lambda)=0$ เมื่อ $\lambda\le 0$

2. $f_R(x,y,\lambda)=1$ เมื่อ $\lambda>0$ ก็ต่อเมื่อ $x=y$
3. $f_R(x,y,\lambda)=f_R(y,x,\lambda)$ สำหรับทุก ๆ $\lambda\in\mathbb{R}$
4. $f_R(x,z,\lambda+\mu)\ge S[f_R(x,y,\lambda), f_R(y,z,\mu)]$ โดยที่ S เป็นการดำเนินการทวิภาคที่วัดได้ (measurable binary real function) ซึ่งนิยามบน $[0,1]\times[0,1]$ ที่ส่งไปยัง $[0,1]$ และ $S(1,1)=1$

5. $f_R(x,y,\lambda)$ มีความต่อเนื่องทางซ้าย (left-continuous) และเป็นฟังก์ชันไม่ลด (non-decreasing function) โดยที่ $\lim f_R(x,y,\lambda)=1$ เมื่อ $\lambda \to \infty$ (Kramosil and Michálek, 1975)

ซึ่งงานวิจัยของมาคราโมซิลและมิคาเลคได้รับความสนใจเป็นจำนวนมากจากนักคณิตศาสตร์ เช่น ในปีค.ศ. 1994 จอร์จและวีรามานี ได้ปรับเปลี่ยนนิยามของระยะทางเชิงวิภัชนัยเล็กน้อยและนิยามวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง (fuzzy metric space) กล่าวคือ กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม (continuous t-norm) และ O เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi \times \Psi \times (0,\ \infty)$ โดยที่ O มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta,\gamma \in \Psi$ และ $s,t>0$

1. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)>0$
2. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$
3. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=\mathrm{O}(\beta,\alpha,t)$
4. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)*\mathrm{O}(\beta,\gamma,s)\le \mathrm{O}(\alpha,\gamma,s+t)$
5. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

โดยจะเรียก $(\Psi,\mathrm{O},*)$ ว่าวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง และได้นำเสนอว่าฟังก์ชัน $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\bullet)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลด นอกจากนี้จอร์จและวีรามานีได้ให้นิยามบอลเปิดและทอพอโลยีบนบนวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางไว้ดังนี้ กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},*)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง และให้ $r\in(0,1)$ $t>0$ และ $\alpha\in\Psi$ เรียกเซต $B(\alpha,r,t)=\{\beta\in\Psi \mid \mathrm{O}(\alpha,\beta,t)>1-r\}$ ว่าเป็นบอลเปิด ที่มีจุดศูนย์กลางที่ α และรัศมี r ณ จุด t ซึ่งพบว่าทุก ๆ บอลเปิดจะเป็นเซตเปิด (open set) และทอพอโลยีบน $(\Psi,\mathrm{O},*)$ คือเซต $\mathrm{T}=\{\Omega\subset X \mid$ สำหรับทุก ๆ $\alpha\in\Omega$ จะมี $t>0$ $r\in(0,1)\}$ โดยที่ $B(\alpha,r,t)\subset\Omega$ และจอร์จและวีรามานีได้พบสมบัติที่ว่า สำหรับทุก ๆ วิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางเป็นปริภูมิเฮาส์ดร์อฟ (George and Veeramani, 1994)

ในเวลาต่อมานักคณิตศาสตร์ได้ใช้แนวคิดเรื่อง วิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนเซตและวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง พัฒนาต่อมาจนกลายเป็นแนวคิดใหม่ ๆ มากมาย เช่น จินฮานปาร์ค ได้นำเสนอนิยามวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง (intuitionistic fuzzy metric space) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ Ψ เป็นเซต ซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์ม(continuous t-conorm) และ O,Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi\times\Psi\times(0,\ \infty)$ โดยที่ O,Θ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta,\gamma\in\Psi$ และ $s,t>0$

1. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)+\Theta(\alpha,\beta,t)\le 1$
2. ถ้า $\alpha\ne\beta$ จะได้ $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)>0$
3. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$
4. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=\mathrm{O}(\beta,\alpha,t)$
5. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)*\mathrm{O}(\beta,\gamma,s)\le \mathrm{O}(\alpha,\gamma,s+t)$

6. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

7. ถ้า $\alpha\neq\beta$ จะได้ $\Theta(\alpha,\beta,t)<1$

8. $\Theta(\alpha,\beta,t)=0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$

9. $\Theta(\alpha,\beta,t)=\Theta(\beta,\alpha,t)$

10. $\Theta(\alpha,\beta,t)\Diamond\Theta(\beta,\gamma,s)\geq\Theta(\alpha,\gamma,s+t)$

11. $\Theta(\alpha,\beta,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

จะกล่าวว่า $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง และได้ให้นิยามบอลเปิด คือ เซต $B(\alpha,r,t)=\{\beta\in\Psi|\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)>1-r$ และ $\Theta(\alpha,\beta,t)<r\}$ สำหรับทุกๆ $r\in(0,1)$ $t>0$ และ $\alpha\in\Psi$ ว่าเป็นบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลางที่ α และรัศมี r ณ จุด t และเรียกเซต

$\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}=\{\Omega\subset X|$ สำหรับทุก ๆ $\alpha\in\Omega$ จะมี $t>0$ $r\in(0,1)\}$ โดยที่ $B(\alpha,r,t)\subset\Omega$ เป็นทอพอโลยีบน $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond)$ และจินฮานปาร์คยังได้นำเสนอสมบัติเชิงทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง (Park, 2004)

ในปี ค.ศ. 2009 มูซาลีน โลฮานีและโมฮุดดีน นำแนวคิดเกี่ยวกับวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางของจินฮานปาร์คมาพัฒนาจนกระทั่งได้นิยามของวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิง 2-ระยะทาง ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้ กำหนดให้ Ψ เป็นเซต ซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์ม (continuous t-conorm) และ O,Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi\times\Psi\times(0,\infty)$ โดยที่ O,Θ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta,\gamma,\phi\in\Psi$ และ $s,t>0$

1. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\gamma,t)+\Theta(\alpha,\beta,\gamma,t)\leq 1$

2. ถ้า $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ จะได้ $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\gamma,t)>0$

3. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\gamma,t)=1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$ หรือ $\alpha=\gamma$ หรือ $\beta=\gamma$

4. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\gamma,t)=\mathrm{O}(\alpha,\gamma,\beta,t)=\mathrm{O}(\beta,\gamma,\alpha,t)$

5. $\mathrm{O}(\phi,\beta,\gamma,t)*\mathrm{O}(\alpha,\phi,\gamma,t)*\mathrm{O}(\alpha,\beta,\phi,t)\leq\mathrm{O}(\alpha,\beta,\gamma,s+t)$

6. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\phi,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

7. ถ้า $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ จะได้ $\Theta(\alpha,\beta,\gamma,t)<1$

8. $\Theta(\alpha,\beta,\gamma,t)=0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$ หรือ $\alpha=\gamma$ หรือ $\beta=\gamma$

9. $\Theta(\alpha,\beta,\gamma,t)=\Theta(\alpha,\gamma,\beta,t)=\Theta(\beta,\gamma,\alpha,t)$

10. $\Theta(\phi,\beta,\gamma,t)\Diamond\Theta(\alpha,\phi,\gamma,t)\Diamond\Theta(\alpha,\beta,\phi,t)\leq\Theta(\alpha,\beta,\gamma,s+t)$

11. $\Theta(\alpha,\beta,\gamma,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

จะกล่าวว่า จะกล่าวว่า $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิง 2-ระยะทาง และได้ให้นิยามบอลเปิด คือ เซต $B(\alpha,r,t)=\{\beta\in\Psi|\mathrm{O}(\alpha,\beta,\gamma,t)>1-r$ และ $\Theta(\alpha,\beta,\gamma,t)<r\}$

สำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ $t > 0$ และ $\alpha \in \Psi$ ว่าเป็นบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลางที่ α และรัศมี r ณ จุด t และเรียกเซต
$\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)} = \{\Omega \subset X |$ สำหรับทุก ๆ $\alpha \in \Omega$ จะมี $t > 0$ $r \in (0,1)\}$ โดยที่ $B(\alpha, r, t) \subset \Omega$ เป็นทอพอโลยีบน $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond)$ นอกจากนี้ยังได้นำเสนอสมบัติเชิงทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิง 2-ระยะทาง (Mursaleen et al., 2009)

จนกระทั่งในปีค.ศ. 2016 โซลิน นาดาแบนได้ขยายแนวคิดเกี่ยวกับปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (b-metric spaces) ด้วยการนำเสนอวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (fuzzy b-metric spaces) กล่าวคือ กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์มและ O เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

(bM1) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, 0) = 0$

(bM2) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

(bM3) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = \mathrm{O}(\beta, \alpha, t)$

(bM4) $\mathrm{O}(\alpha, \gamma, \rho(s+t)) \geq \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) * \mathrm{O}(\beta, \gamma, s)$

(bM5) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \bullet) : [0, \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางซ้าย และ $\lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$

จะกล่าวว่า $(\Psi, \mathrm{O}, *, \rho)$ เป็นวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Nadaban, 2016)

ในงานวิจัยนี้ได้นำแนวคิดของจินฮานปาร์คและนาดาแบนมาสร้างนิยามของวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี พร้อมทั้งศึกษาสมบัติพื้นฐานเพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. สร้างนิยามวิภัชนัยอินิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี
2. สร้างนิยามทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี
3. ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ประโยชน์ของการวิจัย

1. ได้องค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิภัชนัยอินิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีเพื่อศึกษาและเป็นแนวทางในการวิจัยของนักวิจัยต่อไป

2. ได้นิยามของวิภัชนัยอินิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและสมบัติเชิงทอพอโลยีเบื้องต้นเกี่ยวกับวิภัชนัยอินิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ขอบเขตของการวิจัย

ในการวิจัยเรื่องนี้ คณะผู้วิจัยได้กำหนดขอบเขตการวิจัยออกเป็น 3 ด้าน คือ

1. ขอบเขตด้านเนื้อหา

งานวิจัยนี้นิยามวิภัชนัยอินิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี พร้อมทั้งศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี เช่น บอลเปิด เซตเปิด การลู่เข้าของลำดับ เป็นต้น

2. ขอบเขตด้านสถานที่

การวิจัยเรื่องนี้คณะผู้วิจัยได้ใช้อาคาร 39 คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

3. ขอบเขตด้านระยะเวลา

การวิจัยเรื่องนี้ คณะผู้วิจัยใช้เวลาตั้งแต่เริ่มโครงการจนสิ้นสุดโครงการเป็นเวลา 1 ปี เริ่มตั้งแต่วันที่ได้รับอนุมัติจากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

นิยามศัพท์เฉพาะ

บทนิยาม (Zadeh, 1965) กำหนดให้ A เป็นเซตดั้งเดิม (เป็นเซตที่พิจารณา) ของเอกภพสัมพัทธ์ U เซตวิภัชนัย A นิยามโดย $A=\{(x,u_A(x))\,|\,x\in A, u_A(x)\in[0,1]\}$ เรียก $u_A: A\to[0,1]$ นี้ว่า ฟังก์ชันสมาชิกของเซตวิภัชนัย A

บทนิยาม (Czerwik, 1993) ให้ Ψ ไม่เป็นเซตว่างและ $\rho\geq 1$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน $\wedge:\Psi\times\Psi\to\mathbb{R}^+$ เป็นระยะทางแบบบี (b-metric) บน Ψ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\alpha,\beta,\gamma\in\Psi$

(b_1) $\wedge(\alpha,\beta)=0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$

(b_2) $\wedge(\alpha,\beta)=\wedge(\beta,\alpha)$

(b_3) $d(\wedge,\beta)\leq\rho[\wedge(\alpha,\gamma)+\wedge(\gamma,\beta)]$

จะเรียก $(\Psi,\wedge)$ ว่าเป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

บทนิยาม (George and Veeramani, 1994) กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม (continuous t-norm) และ O เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi\times\Psi\times(0,\infty)$ โดยที่ O มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta,\gamma\in\Psi$ และ $s,t>0$

1. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)>0$
2. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$
3. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=\mathrm{O}(\beta,\alpha,t)$
4. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)*\mathrm{O}(\beta,\gamma,s)\leq\mathrm{O}(\alpha,\gamma,s+t)$
5. $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

โดยจะเรียก $(\Psi, \mathrm{O}, *)$ ว่าวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง

บทนิยาม (Nadaban, 2016) กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์มและ O เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

(bM1) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, 0) = 0$

(bM2) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

(bM3) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = \mathrm{O}(\beta, \alpha, t)$

(bM4) $\mathrm{O}(\alpha, \gamma, \rho(s+t)) \geq \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) * \mathrm{O}(\beta, \gamma, s)$

(bM5) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \bullet) : [0, \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางซ้าย และ $\lim_{t \to \infty} \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$

จะกล่าวว่า $(\Psi, \mathrm{O}, *, \rho)$ เป็นวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี