บทที่ 2
แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ คณะผู้วิจัยได้ศึกษาจากแนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยต่าง ๆ ดังนี้

1. เซตวิภัชนัย (Zadeh, 1965: 338-353)

เซตวิภัชนัยเป็นระบบด้านคอมพิวเตอร์ ที่คิดค้นโดยซาเดห์ ในปีค.ศ. 1965 ซึ่งเป็นผลงานวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอก โดยเซตวิภัชนัยจะอยู่บนพื้นฐานความเป็นจริง ที่ว่า ทุกสิ่งบนโลกแห่งความเป็นจริงไม่ใช่มีเฉพาะสิ่งมีความแน่นอนเท่านั้น แต่มีหลายสิ่งหลาย เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างไม่เที่ยงและไม่แน่นอน (uncertain) อาจเป็นสิ่งที่คลุมเครือไม่ใช่ ชัดเจน (exact) ยกตัวอย่างเช่น เซตของอายุคน อาจแบ่งเป็น วัยทารก วัยเด็ก วัยรุ่น วัยกลางคน และวัย ชรา จะเห็นได้ว่าในแต่ละช่วงอายุคนไม่สามารถระบุได้แน่ชัดว่าวัยทารกกับวัย เด็กแยกจากกันแน่ชัด ช่วงใด วัยทารกอาจถูกตีความว่าเป็นอายุระหว่าง 0 ถึง 1 ปีบางคนอาจตีความว่าวัยทารกอยู่ในช่วงอายุ 0 ถึง 2 ปีในทำนองเดียวกัน วัยเด็กและวัยรุ่น ก็ไม่สามารถระบุได้ชัดเจนว่าช่วงต่อของอายุควรจะอยู่ ในช่วงใด อาจตีความว่าวัยเด็กมีอายุอยู่ในช่วง 1 ถึง 12 ปีหรืออาจเป็น 2 ถึง 10 ปีเป็นต้น สิ่งเหล่าเป็นตัวอย่างของความไม่แน่นอน ซึ่งเป็นลักษณะทางธรรมชาติที่เกิดขึ้นทั่วไป เซตของเหตุการณ์ที่ไม่ แน่นอนเช่นนี้เรียกว่าเซตวิภัชนัย จากแนวความคิดของ Zadeh เกี่ยวกับความไม่แน่นอนได้มีการขยายแนวคิดเพื่อนำไป ประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ มากมายจนนับไม่ถ้วน ได้มีนักวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีเสริมกับแนวคิดเดิมจนทำให้เซตวิภัชนัยโดดเด่นในวงการคอมพิวเตอร์ ถึงแม้ว่าเซตวิภัชนัยจะนำเสนอจากคนอเมริกันแต่ประเทศอเมริกาก็ไม่ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างจริงจังในช่วงต้น ๆ แต่ประเทศญี่ปุ่นเล็งเห็นคุณค่าของศาสตร์ด้าน นี้ได้เป็นผู้บุกเบิกเซตวิภัชนัยทางการค้า โดยได้นำไปประยุกต์ใช้ในเครื่องใช้ไฟฟ้ามากมาย เช่น เครื่องปรับอากาศ เครื่องซักผ้า หม้อหุงข้าว และอื่น ๆ อีกมากมาย ในยุคปัจจุบันประเทศสหรัฐอเมริกา ได้ในความสำคัญกับศาสตร์นี้มากขึ้น โดยได้มีการทุ่มงบประมาณให้กับการวิจัยมากขึ้น ซึ่งซาเดห์ได้ให้นิยามของเซตวิภัชนัยไว้ดังนี้

กำหนดให้ A เป็นเซตดั้งเดิม (เป็นเซตที่พิจารณา) ของเอกภพสัมพัทธ์ U เซตวิภัชนัย A นิยามโดย $A=\{(x,u_A(x)) \mid x\in A, u_A(x)\in[0,1]\}$ เรียก $u_A : A \to [0,1]$ นี้ว่าฟังก์ชันสมาชิกของเซตวิภัชนัย A

2. ปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Czerwik, 1993: 5-11)

ให้ Ψ ไม่เป็นเซตว่างและ $\rho \geq 1$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน $\wedge : \Psi \times \Psi \to \mathbb{R}^{+}$ เป็นระยะทางแบบบี (b-metric) บน Ψ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$

(b_1) $\wedge(\alpha, \beta) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

(b_2) $\wedge(\alpha, \beta) = \wedge(\beta, \alpha)$

(b_3) $d(\wedge, \beta) \leq \rho[\wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta)]$

จะเรียก $(\Psi, \wedge)$ ว่าเป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

3. วิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง (George and Veeramani, 1994: 395-399)

กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม (continuous t-norm) และ O เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

1. $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) > 0$
2. $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$
3. $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = \mathrm{O}(\beta, \alpha, t)$
4. $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) * \mathrm{O}(\beta, \gamma, s) \leq \mathrm{O}(\alpha, \gamma, s + t)$
5. $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \cdot) : (0, \infty) \to (0, 1]$ มีความต่อเนื่อง

โดยจะเรียก $(\Psi, \mathrm{O}, *)$ ว่าวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง

4. วิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง (Park, 2004: 39-46)

วิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางเป็นผลงานวิจัยของจินฮานปาร์ค ซึ่งนำเสนอในปี ค.ศ. 2004 ซึ่งวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางเป็นการศึกษาความน่าจะเป็นที่สมาชิกสองสมาชิกใด ๆในปริภูมิอิงระยะทางจะอยู่ใกล้หรือไกลกัน โดยอ้างอิงการดำเนินการทวิภาคที่มีสมบัติดังนี้

กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1] \times [0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $*$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม เมื่อ (1) $*$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่และสลับที่ (2) $*$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (3) สำหรับแต่ละ ๆ $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ $\alpha * 1 = \alpha$ (4) สำหรับแต่ละ ๆ $\alpha, \beta, \gamma, \phi \in [0,1]$ ถ้า $\alpha \leq \gamma$ และ $\beta \leq \phi$ แล้ว $\alpha * \beta \leq \gamma * \phi$ ถ้าให้ $\Diamond$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1] \times [0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $\Diamond$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์ม เมื่อ $\Diamond$ มีสมบัติ (1), (2), (4) และ (3) สำหรับแต่ละ ๆ $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ $\alpha \Diamond 0 = \alpha$

จินฮานปาร์คใช้การดำเนินการบนวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางและสร้างนิยามของวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง ได้คือ กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์มและ O,Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi\times\Psi\times(0,\ \infty)$ โดยที่ O,Θ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta,\gamma\in\Psi$ และ $s,t>0$

(1) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)+\Theta(\alpha,\beta,t)\le 1$

(2) ถ้า $\alpha\ne\beta$ จะได้ $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)>0$

(3) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$

(4) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)=\mathrm{O}(\beta,\alpha,t)$

(5) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)*\mathrm{O}(\beta,\gamma,s)\le\mathrm{O}(\alpha,\gamma,s+t)$

(6) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

(7) ถ้า $\alpha\ne\beta$ จะได้ $\Theta(\alpha,\beta,t)<1$

(8) $\Theta(\alpha,\beta,t)=0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha=\beta$

(9) $\Theta(\alpha,\beta,t)=\Theta(\beta,\alpha,t)$

(10) $\Theta(\alpha,\beta,t)\Diamond\Theta(\beta,\gamma,s)\ge\Theta(\alpha,\gamma,s+t)$

(11) $\Theta(\alpha,\beta,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ มีความต่อเนื่อง

โดยจะกล่าวว่า (O,Θ) เป็นระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบน Ψ และเขียนแทนโดย (O,Θ) และกล่าวว่า $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง

นอกจากนี้จินฮานปาร์คได้ให้นิยามบอลเปิดบน $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond)$ ดังนี้ กำหนดให้ $r\in(0,1)$ $t>0$ และ $\alpha\in\Psi$ จะเรียกเซต $B(\alpha,r,t)=\{\beta\in\Psi|\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)>1-r$ และ $\Theta(\alpha,\beta,t)<r\}$ ว่าเป็นบอลเปิด ที่มีจุดศูนย์กลางที่ α และรัศมี r ณ จุด t ซึ่งพบว่าบอลเปิด $B(\alpha,r,t)$ จะเป็นเซตเปิดด้วย และได้สร้างเซต $\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}=\{\Omega\subset X|$ สำหรับทุก ๆ $\alpha\in\Omega$ จะมี $t>0$ $r\in(0,1)\}$ โดยที่ $B(\alpha,r,t)\subset\Omega$ เป็นทอพอโลยีบน $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond)$ ซึ่ง จินฮานปาร์คได้แสดงไว้ว่าวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางเป็นปริภูมิเฮาส์ดร์อฟ

ลำดับต่อมาจินฮานปาร์คศึกษาสมบัติเชิงทอพอโลยีเบื้องต้นบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางและได้สมบัติเชิงทอพอโลยี ดังนี้

1. ความมีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง (IF-bound)

ให้ $\Omega \subseteq \Psi$ จะเรียก Ω ว่ามีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง (IF-bound) เมื่อมี $t > 0$ และ $r \in (0,1)$ โดยที่สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \Omega$ จะได้ $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) > 1 - r$ และ $\Theta(\alpha, \beta, t) < r$

2. สำหรับทุก ๆ เซตกระชับ (compact set) ของวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางจะมีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง

3. นิยามการลู่เข้าบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกเมตริก (O, Θ)

ให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ลำดับ (α_n) จะลู่เข้าสู่ $L \in \Psi$ บนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกเมตริก (O, Θ) ถ้าสำหรับทุก ๆ $r > 0$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\mathrm{O}(\alpha_n, L, t) > 1 - r$ และ $\Theta(\alpha_n, L, t) < r$ ทุก ๆ $n \geq n_0$ และเขียนแทนโดย $\alpha_n \xrightarrow{(\mathrm{O}, N)} L$ ขณะที่ $n \to \infty$

4. นิยามลำดับโคชี (Cauchy sequence) บนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทาง

ให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่า (α_n) เป็นลำดับโคชี ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ จะได้ $\mathrm{O}(\alpha_m, \alpha_n, t) > 1 - r$ และ $\Theta(\alpha_m, \alpha_n, t) < r$ นอกจากนี้ได้อีกว่าทุก ๆ ลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้าจะเป็นปริภูมิบริบูรณ์

3. คณะผู้วิจัยได้ศึกษาเรื่อง On some results in fuzzy metric spaces ของ George และ Veeramani (1994) ซึ่งได้ศึกษานิยามวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางและศึกษาตัวอย่างประกอบ ดังนี้

5. วิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Nadaban, 2016: 273-281)

วิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีเป็นปริภูมิที่นำเสนอโดย โซลิน นาดาบาน ในปี ค.ศ. 2016 ซึ่งโซลิน นาดาบาน ให้นิยามของวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีไว้ดังนี้

กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์มและ O เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

(bM1) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, 0) = 0$

(bM2) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

(bM3) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = \mathrm{O}(\beta, \alpha, t)$

(bM4) $\mathrm{O}(\alpha, \gamma, \rho(s + t)) \geq \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) * \mathrm{O}(\beta, \gamma, s)$

(bM5) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \bullet) : [0, \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางซ้าย และ $\lim_{t \to \infty} \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$

จะกล่าวว่า $(\Psi, \mathrm{O}, *, \rho)$ เป็นวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

นอกจากนี้โซลิน นาดาบานยังได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี ดังนี้

1. ฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ (ρ-nondecreasing function)

ให้ $\rho \geq 1$ และ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ เมื่อสำหรับแต่ละ $t < s$ จะได้ว่า $f(t) \leq f(\rho s)$

2. การลู่เข้าบนวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง

กำหนดให้ $(\Psi, \mathrm{O}, *, \rho)$ เป็นวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง ลำดับ (α_n) ใน Ψ จะกล่าวว่าลู่เข้า เมื่อ มี $\alpha \in \Psi$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $t > 0$ จะได้ $\mathrm{O}(\alpha_n, \alpha, t) = 1$ ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ เขียนแทนโดย $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$ หรือ $\alpha_n \to \alpha$

3. ลำดับโคชีบนวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง

ให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ลำดับ (α_n) ใน Ψ จะกล่าวว่า ลำดับ (α_n) เป็นลำดับโคชี ถ้าสำหรับทุก ๆ $r > 0$ และทุก ๆ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ $\mathrm{O}(\alpha_n, \alpha_m, t) > 1 - r$ ทุก ๆ $n, m \geq n_0$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยต่างประเทศ

ซาเดห์ (Zadeh, 1965: 338-353) เซตวิภัชนัยคือคลาสของสิ่งของที่มีระดับการเป็นสมาชิกที่ต่อเนื่องกัน เช่น เซตซึ่งประกอบด้วยฟังก์ชันเฉพาะที่กำหนดให้แต่ละสิ่งของมีระดับการเป็นสมาชิกระหว่าง 0 และ 1 แนวคิดเกี่ยวกับเซตย่อย ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน คอมพลีเมนต์ ความสัมพันธ์ คอนเวกซ์ ฯลฯ ได้ถูกนำมาขยายต่อบนเซตวิวิภัชนัย โดยเฉพาะอย่างยิ่งได้พิสูจน์ทฤษฎีการแยกสำหรับคอนเวกซ์ของเซตวิภัชนัยโดยเซตวิภัชนัยไม่จำเป็นต้องเป็นเซตไม่มีส่วนร่วม

จอร์จและวีรามานี (George and Veeramani, 1994) ได้ศึกษาเกี่ยวกับเฮาดร์อฟทอพอโลยีบนวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางซึ่งนำเสนอโดยมาครามิซิลและมิคาเลค (Kramosil and Michálek, 1975) และพิสูจน์สมบัติบางส่วนของปริภูมิอิงระยะทางรวมถึงทฤษฎีบทของแบร์ (Baire's theorem) บนวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทาง

จินฮานปาร์ค (Park, 2004) ได้ใช้แนวคิดเกี่ยวกับอินทิวชันนิสติกบนเซตวิภัชนัยมานิยามวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกกบนปริภูมิอิงระยะทาง และศึกษาสมบัติเชิงทอพทโลยีนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางรวมถึงทฤษฎีบทของแบร์

โซลิน นาดาแบน (Nadaban, 2016) ปริภูมิอิงระยะทางและสมบัติทั่วไปต่าง ๆ ปรากฏขึ้นบ่อย ๆ ในการประยุกต์ใช้สำหรับวิทยาการทางคอมพิวเตอร์ จึงเป็นเหตุให้ โซลิน นาดาแบน ศึกษาเกี่ยวกับหลักการของวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี โดยขยายงานวิจัยจากหลักการของวิภัชนัยบนปริภูมิอิงระยะทางและหลักการของปริภูมิอิงระยะทางแบบบี