บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในการศึกษาวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี ทางคณะผู้วิจัยได้

1. สร้างนิยามที่เกี่ยวข้องกับวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

2. สร้างนิยามที่เกี่ยวข้องกับทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีพร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

3. ศึกษาสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของปริภูมิทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิระยะทางแบบบี โดยเริ่มจากสมบัติต่าง ๆ เช่น เซตเปิด ลำดับลู่เข้า ลำดับโคชี การมีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิระยะทางแบบบี เป็นต้น

ซึ่งทางคณะผู้วิจัยผลการวิจัย ดังนี้

1. บทนิยามของวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

บทนิยาม 4.1 (Park, 2004) กำหนดให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1]\times[0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $*$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม เมื่อ

(1) $*$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่และสลับที่

(2) $*$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(3) สำหรับแต่ละ ๆ $0\le\alpha\le1$ จะได้ $\alpha*1=\alpha$

(4) สำหรับแต่ละ ๆ $\alpha,\beta,\gamma,\phi\in[0,1]$ ถ้า $\alpha\le\gamma$ และ $\beta\le\phi$ แล้ว $\alpha*\beta\le\gamma*\phi$

บทนิยาม 4.2 (Park, 2004) กำหนดให้ $\Diamond$ เป็นการดำเนินการทวิภาคจาก $[0,1]\times[0,1]$ ไปยัง $[0,1]$ จะเรียกการดำเนินการ $\Diamond$ ว่ามีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์ม เมื่อ

(1) $\Diamond$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่และสลับที่

(2) $\Diamond$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(3) สำหรับแต่ละ ๆ $0\le\alpha\le1$ จะได้ $\alpha\Diamond0=\alpha$

(4) สำหรับแต่ละ ๆ $\alpha,\beta,\gamma,\phi\in[0,1]$ ถ้า $\alpha\le\gamma$ และ $\beta\le\phi$ แล้ว $\alpha\Diamond\beta\le\gamma\Diamond\phi$

ข้อสังเกต 4.1 (Park, 2004)

(1) ถ้าให้ $\alpha_1,\alpha_2\in(0,1)$ และ $\alpha_1>\alpha_2$ แล้วจะได้ว่ามี $\alpha_3,\alpha_4\in(0,1)$ โดยที่ $\alpha_1*\alpha_3\ge\alpha_2$ และ $\alpha_1\ge\alpha_4\Diamond\alpha_2$

(2) ถ้าให้ $\alpha_5 \in (0,1)$ แล้วจะได้ว่ามี $\alpha_6, \alpha_7 \in (0,1)$ โดยที่ $\alpha_6 * \alpha_6 \ge \alpha_5$ และ $\alpha_7 \Diamond \alpha_7 \le \alpha_5$

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ $*, \Diamond : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ โดยที่ $\alpha * \beta = \alpha\beta$ และ $\alpha \Diamond \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ เมื่อ $\alpha, \beta \in [0,1]$ จะได้ว่า $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม และ $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์ม

บทนิยาม 4.3 (Czerwik, 1993) ให้ Ψ ไม่เป็นเซตว่างและ $\rho \ge 1$ จะได้ว่า ฟังก์ชัน $\wedge : \Psi \times \Psi \to \mathbb{R}^+$ เป็นระยะทางแบบบี (b-metric) บน Ψ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$

(b_1) $\wedge(\alpha, \beta) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

(b_2) $\wedge(\alpha, \beta) = \wedge(\beta, \alpha)$

(b_3) $d(\wedge, \beta) \le \rho[\wedge(\alpha, \gamma) + \wedge(\gamma, \beta)]$

จะเรียก $(\Psi, \wedge)$ ว่าเป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ตัวอย่าง 4.2 (Nadaban, 2016) ให้ $\Psi = \mathbb{R}$ และ $\wedge_b(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)^2$ เป็นระยะทางแบบบี โดยที่ $\rho = 2$ จะได้ว่า $(\mathbb{R}, \wedge_b)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

บทนิยาม 4.4 กำหนดให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \ge 1$ $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์มและ O, Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O, Θ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

($IFbM_1$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) + \Theta(\alpha, \beta, t) \le 1$

($IFbM_2$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, 0) = 0$

($IFbM_3$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

($IFbM_4$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = \mathrm{O}(\beta, \alpha, t)$

($IFbM_5$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \ge \mathrm{O}(\alpha, \gamma, t) * \mathrm{O}(\gamma, \beta, s)$

($IFbM_6$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางซ้าย และ $\lim_{t \to \infty} \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$

($IFbM_7$) $\Theta(\alpha, \beta, 0) = 1$

($IFbM_8$) $\Theta(\alpha, \beta, t) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

($IFbM_9$) $\Theta(\alpha, \beta, t) = \Theta(\beta, \alpha, t)$

($IFbM_{10}$) $\Theta(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \le \Theta(\alpha, \gamma, t) \Diamond \Theta(\gamma, \beta, s)$

($IFbM_{11}$) $\Theta(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางขวา และ $\lim_{t \to \infty} \Theta(\alpha, \beta, t) = 0$

จะเรียก $\left(\mathrm{O},\Theta\right)_b$ ว่าระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric) บน Ψ และเรียก $\left(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho\right)$ ว่าวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric)

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดให้ $\left(\Psi,\wedge\right)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางแบบบี $\rho \geq 1$ การดำเนินงานทวิภาค $*$ และ $\Diamond$ นิยามโดย สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta \in \left[0,1\right]$ จะได้ $\alpha * \beta = \alpha\beta$ และ $\alpha \Diamond \beta = \min\left\{\alpha+\beta,1\right\}$ และให้ O_b และ Θ_b เป็นความสัมพันธ์วิภัชนัยบน $\Psi\times\Psi\times\left[0,\infty\right)$ โดยที่

$$\mathrm{O}_b\left(\alpha,\beta,t\right)=\frac{t}{t+\wedge(\alpha,\beta)} \text{ และ } \Theta_b\left(\alpha,\beta,t\right)=\frac{\wedge(\alpha,\beta)}{t+\wedge(\alpha,\beta)} \text{ เมื่อ } t>0 \text{ และ } \alpha,\beta\in\Psi$$

ดังนั้น $\left(\Psi,\mathrm{O}_b,\Theta_b,*,\Diamond,\rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

พิสูจน์ ในที่นี้จะพิสูจน์เพียง ($IFbM_5$) และ ($IFbM_{10}$) เพราะว่าข้ออื่น ๆ เป็นการพิสูจน์ขั้นพื้นฐาน

ให้ $\alpha,\beta,\gamma\in\Psi$ และ $s,t>0$ และสมมติให้ $\mathrm{O}_b\left(\alpha,\gamma,t\right)\leq\mathrm{O}_b\left(\gamma,\beta,s\right)$

ดั้งนั้น $\dfrac{t}{t+\wedge(\alpha,\gamma)}\leq\dfrac{s}{s+\wedge(\gamma,\beta)}$

นั้นคือ $t\wedge(\gamma,\beta)\leq s\wedge(\alpha,\gamma)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\mathrm{O}_b\left(\alpha,\beta,\rho\left(t+s\right)\right) &= \frac{\rho\left(t+s\right)}{\rho\left(t+s\right)+\wedge(\alpha,\beta)} \\
&\geq \frac{\rho\left(t+s\right)}{\rho\left(t+s\right)+\rho\left(\wedge(\alpha,\gamma)+\wedge(\gamma,\beta)\right)} \\
&= \frac{t+s}{t+s+\wedge(\alpha,\gamma)+\wedge(\gamma,\beta)}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\dfrac{t+s}{t+s+\wedge(\alpha,\gamma)+\wedge(\gamma,\beta)}\geq\dfrac{t}{t+\wedge(\alpha,\gamma)}$

จาก
$$\begin{aligned}
s\wedge(\alpha,\gamma) &\geq t\wedge(\gamma,\beta) \\
t^2+st+t\wedge(\alpha,\gamma)+s\wedge(\alpha,\gamma) &\geq t^2+st+t\wedge(\alpha,\gamma)+t\wedge(\gamma,\beta) \\
\left(t+s\right)\left(t+\wedge(\alpha,\gamma)\right) &\geq t\left(t+s+\wedge(\alpha,\gamma)+\wedge(\gamma,\beta)\right) \\
\frac{t+s}{t+s+\wedge(\alpha,\gamma)+\wedge(\gamma,\beta)} &\geq \frac{t}{t+\wedge(\alpha,\gamma)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\mathrm{O}_b\left(\alpha,\beta,\rho\left(t+s\right)\right) &\geq \frac{t}{t+\wedge(\alpha,\gamma)} \\
&\geq \left(\frac{t}{t+\wedge(\alpha,\gamma)}\right)\left(\frac{s}{s+\wedge(\gamma,\beta)}\right) \\
&= \mathrm{O}_b(\alpha,\gamma,t)*\mathrm{O}_b(\gamma,\beta,s)
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\Theta\left(\alpha,\beta,\rho\left(t+s\right)\right) \le \Theta(\alpha,\gamma,t) \lozenge \Theta(\gamma,\beta,s)$

ดังนั้น $\left(\Psi,\mathrm{O}_b,\Theta_b,*,\lozenge,\rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี □

บทนิยาม 4.5 (Nadaban, 2016) ให้ $\rho \ge 1$ และ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ เมื่อสำหรับแต่ละ $t<s$ จะได้ว่า $f\left(t\right) \le f\left(\rho s\right)$ และฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มแบบ ρ เมื่อสำหรับแต่ละ $t<s$ จะได้ว่า $g\left(t\right) \ge g\left(\rho s\right)$

บทแทรก 4.1 สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta \in \Psi$ ฟังก์ชัน $\mathrm{O}\left(\alpha,\beta,\cdot\right)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ จาก $\left[0,\infty\right)$ ไปยัง $\left[0,1\right]$ และ $\Theta\left(\alpha,\beta,\cdot\right)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มแบบ ρ จาก $\left[0,\infty\right)$ ไปยัง $\left[0,1\right]$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\alpha,\beta \in \Psi$ และ $0<t<s$

จะได้
$$\begin{aligned}\mathrm{O}\left(\alpha,\beta,\rho s\right) &= \mathrm{O}\left(\alpha,\beta,\rho\left(s-t+t\right)\right)\\ &\ge \mathrm{O}\left(\alpha,\beta,s-t\right)*\mathrm{O}\left(\alpha,\beta,t\right)\\ &= 1*\mathrm{O}\left(\alpha,\beta,t\right)\\ &= \mathrm{O}\left(\alpha,\beta,t\right)\end{aligned}$$

นั่นคือ $\mathrm{O}\left(\alpha,\beta,\cdot\right)$ เป็นฟังก์ชันไม่ลดแบบ ρ

ในทำนองเดียวกัน
$$\begin{aligned}\Theta\left(\alpha,\beta,\rho s\right) &= \Theta\left(\alpha,\beta,\rho\left(s-t+t\right)\right)\\ &\le \Theta\left(\alpha,\beta,s-t\right)\lozenge\Theta\left(u,\beta,t\right)\\ &= 0\lozenge\Theta\left(\alpha,\beta,t\right)\\ &= \Theta\left(\alpha,\beta,t\right)\end{aligned}$$

นั่นคือ $\Theta\left(\alpha,\beta,\cdot\right)$ เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่มแบบ ρ □

2. ทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

บทนิยาม 4.6 กำหนดให้ $\left(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\lozenge,\rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี สำหรับแต่ละ $r \in \mathbb{R}$ $t>0$ และ $\alpha \in \Psi$ จะเรียก

เซต $B\left(\alpha,r,t\right)=\left\{\beta \in \Psi \middle| \mathrm{O}\left(\alpha,\beta,t\right)>1-r,\Theta\left(\alpha,\beta,t\right)<r\right\}$ ว่าเป็นบอลเปิด (open ball) ที่มีจุดศูนย์กลางที่ α รัศมี r ณ จุดเวลา t

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดให้ $(\mathbb{R},\mathrm{O}_b,\Theta_b,*,\Diamond,2)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี ซึ่งกำหนดโดยระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี $\wedge_b$ และให้ $r=\dfrac{1}{2}$ $t=1$ และ $0\in\mathbb{R}$ จะได้

$$B_{d_b}\left(0,\frac{1}{2},1\right)=\left\{\beta\in\mathbb{R}^n \middle| \mathrm{O}_{d_b}(0,\beta,1)>\frac{1}{2},\Theta_{d_b}(0,\beta,1)<\frac{1}{2}\right\}$$

จาก $\mathrm{O}_{d_b}(0,\beta,1)=\dfrac{1}{1+\wedge_b(0,\beta)}>\dfrac{1}{2}$ และ $\Theta_{d_b}(0,\beta,1)=\dfrac{\wedge_b(0,\beta)}{1+\wedge_b(0,\beta)}<\dfrac{1}{2}$

จะได้ $\wedge_b(0,\beta)<1$ จากตัวอย่าง 4.6 จะได้ $\wedge_b(0,\beta)=(0-\beta)^2=\beta^2<1$

ดังนั้น $B_{d_b}\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)=\left\{\beta\in\mathbb{R}^n \middle| \beta^2<1\right\}$ $\square$

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้

$$\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}=\left\{\Omega\subseteq\Psi \middle| \forall\alpha\in\Omega,\exists t>0,\exists r\in(0,1),B(\alpha,r;t)\subseteq\Omega\right\}$$

จะได้ $\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$

พิสูจน์ (1) เห็นได้ชัดว่า $\varnothing$ และ Ψ เป็นสมาชิกใน $\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$

(2) ให้ $\{\tau_i\}\in\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ และ $\tau=\bigcup_{i\in I}\tau_i$

คณะผู้วิจัยจะแสดงว่า $\tau\in\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ ถ้าให้ $\alpha\in\tau$ จะได้ว่ามี $i_0\in\mathrm{I}$ โดยที่ $\alpha\in\tau_{i_0}$

เนื่องจาก $\tau_{i_0}\in\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ จะได้ว่ามี $t>0$ และ $r\in(0,1)$ โดยที่ $B(\alpha,r,t)\subseteq\tau_{i_0}$

นั่นคือ $B(\alpha,r,t)\subseteq\bigcup_{i\in I}\tau_i=\tau$

(3) ให้ $\tau_1,\tau_2\in\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ จะได้ $\tau_1,\tau_2\subset\Psi$ และได้ว่า $\tau_1\cap\tau_2\subset\Psi$

ให้ $\alpha\in\tau_1\cap\tau_2$ จากนิยามทอพอโลยี $\mathrm{T}_{(M,N)}$ จะมี $t_1,t_2>0$ และมี $r_1,r_2\in(0,1)$ ที่ซึ่ง $B(\alpha,r_1,t_1)\subseteq\tau_1$ และ $B(\alpha,r_2,t_2)\subseteq\tau_2$ ดังนั้น

$B(\alpha,r_1,t_1)\cap B(\alpha,r_2,t_2)\subset\tau_1\cap\tau_2$

ลำดับต่อไปต้องการแสดงว่า $B(\alpha,r_1,t_1)\cap B(\alpha,r_2,t_2)$ เป็นเซตเปิด

สมมติให้ $r=min\{r_1,r_2\}$ $t=min\left\{\dfrac{t_1}{\rho},\dfrac{t_2}{\rho}\right\}$ และ $\beta\in B(\alpha,r,t)$

จะได้

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(\alpha,\beta,t_1)&=\mathrm{O}\left(\alpha,\beta,\rho\left(\frac{t_1}{\rho}\right)\right)\\&\geq\mathrm{O}(\alpha,\beta,t)\\&>1-r\end{aligned}$$

$$\geq 1-r_1$$

และ $$\Theta(\alpha,\beta,t_1)=\Theta\left(\alpha,\beta,\rho\left(\frac{t_1}{\rho}\right)\right)$$

$$\leq \Theta(\alpha,\beta,t)$$

$$< r$$

$$\leq r_1$$

เพราะฉะนั้น $\beta \in B(\alpha,r_1,t_1)$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $O(\alpha,\beta,t_2)\geq 1-r_2$ และ $\Theta(\alpha,\beta,t_2)\leq r_2$

เพราะฉะนั้น $\beta \in B(\alpha,r_2,t_2)$ และได้อีกว่า $\beta \in B(\alpha,r_1,t_1)\cap B(\alpha,r_2,t_2)$ และ $B(\alpha,r,t)\subseteq B(\alpha,r_1,t_1)\cap B(\alpha,r_2,t_2)$

นั่นคือ $B(\alpha,r_1,t_1)\cap B(\alpha,r_2,t_2)$ เป็นเซตเปิด และได้อีกว่า $\tau_1\cap\tau_2\in \mathrm{T}_{(O,\Theta)}$

ดังนั้น $\mathrm{T}_{(O,\Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน $(\Psi,O,\Theta,*,\Diamond,\rho)$ □

ข้อสังเกต 4.2 สำหรับทุก ๆ $\alpha\in\Psi$ $r\in(0,1)$ และ $t>0$ $B(\alpha,r,t)$ เป็นเซตเปิด

3. สมบัติต่าง ๆ ของทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ $(\Psi,O,\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีแล้วจะได้ว่า $(\Psi,O,\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดร์อฟ

พิสูจน์ ให้ $\alpha,\beta\in\Psi$ โดยที่ $\alpha\neq\beta$ และ $t>0$

ดังนั้น $0<O(\alpha,\beta,s)<1$ และ $0<\Theta(\alpha,\beta,s)<1$

ให้ $r_1=O(\alpha,\beta,t)$ $r_2=\Theta(\alpha,\beta,t)$ และ $r=\max\{r_1,1-r_2\}$ จะได้ว่าสำหรับทุก ๆ $r_0\in(r,1)$ จะมี r_3 และ r_4 ที่ซึ่ง $r_3 * r_3\geq r_0$ และ $(1-r_4)\Diamond(1-r_4)\leq 1-r_0$

ต่อจากนั้นให้ $r_5=\max\{r_3,r_4\}$

พิจารณา $B\left(\alpha,1-r_5,\frac{t}{2\rho}\right)$ และ $B\left(\beta,1-r_5,\frac{t}{2\rho}\right)$ เห็นได้ชัดว่า

$$B\left(\alpha,1-r_5,\frac{t}{2\rho}\right)\cap B\left(\beta,1-r_5,\frac{t}{2\rho}\right)\neq\varnothing$$

สมมติให้ $\gamma\in B\left(\alpha,1-r_5,\frac{t}{2\rho}\right)\cap B\left(\beta,1-r_5,\frac{t}{2\rho}\right)$

จะได้ว่า $r_1=O(\alpha,\beta,t)$

$$=O\left(\alpha,\beta,\rho\left(\frac{t}{2\rho}+\frac{t}{2\rho}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathrm{O}\left(\alpha,\gamma,\frac{t}{2\rho}\right)*\mathrm{O}\left(\gamma,\beta,\frac{t}{2\rho}\right)\\
&>\left[1-\left(1-r_5\right)\right]*\left[1-\left(1-r_5\right)\right]\\
&\geq r_5 * r_5\\
&\geq r_3 * r_3\\
&\geq r_0\\
&> r_1
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
r_2 &= \Theta\left(\alpha,\beta,t\right)\\
&=\Theta\left(\alpha,\beta,\rho\left(\frac{t}{2\rho}+\frac{t}{2\rho}\right)\right)\\
&\leq \Theta\left(\alpha,\gamma,\frac{t}{2\rho}\right)\Diamond\Theta\left(\gamma,\beta,\frac{t}{2\rho}\right)\\
&<\left(1-r_5\right)\Diamond\left(1-r_5\right)\\
&\leq\left(1-r_4\right)\Diamond\left(1-r_4\right)\\
&\leq 1-r_0\\
&< r_2
\end{aligned}$$

นั่นคือ $r_1 > r_1$ และ $r_2 < r_2$ ซึ่งขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\left(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho\right)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดร์อฟ □

ข้อสังเกต 4.3 กำหนดให้ $\left(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้ $\Omega\subseteq\Psi$ เป็นเซตย่อยกระชับ จะได้ว่า Ω เป็นเซตปิด

บทนิยาม 4.7 กำหนดให้ $\left(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และ $\Omega\subseteq\Psi$ จะเรียก Ω ว่ามีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (IF_b-bounded) เมื่อมี $t>0$ $r\in\left(0,1\right)$ โดยที่สำหรับแต่ละ $\alpha,\beta\in\Omega$ จะได้ $\mathrm{O}\left(\alpha,\beta,t\right)>1-r$ และ $\Theta\left(\alpha,\beta,t\right)<r$

ข้อสังเกต 4.4 สำหรับทุก ๆ $\left(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีซึ่งกำหนดโดยระยะทางแบบบี $\wedge$ จะได้ $\Omega\subseteq\Psi$ มีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีก็ต่อเมื่อ Ω มีขอบเขตบน $\left(\Psi,\wedge\right)$

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้ $\Omega\subseteq\Psi$ โดยที่ Ω เป็นเซตกระชับ Ω บน $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ จะได้ว่า Ω มีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

พิสูจน์ ให้ $t>0$ และ $r\in(0,1)$ จากเซตปกเปิด $\{B(\alpha,r,t)|u\in\Omega\}$ ของ Ω เนื่องจาก Ω เป็นเซตกระชับ จะได้ว่ามี $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\Omega$ โดยที่ $\Omega\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}B(\alpha_i,r,t)$

สมมติให้ $\alpha,\beta\in\Omega$ จะได้ว่า $\alpha\in B(\alpha_i,r,t)$ และ $\beta\in B(\alpha_j,r,t)$ สำหรับบาง i,j

ดังนั้น $\mathrm{O}(\alpha,\alpha_j,t)>1-r$ $\Theta(\alpha,\alpha_j,t)<r$ $\mathrm{O}(\beta,\alpha_j,t)>1-r$ และ $\Theta(\beta,\alpha_j,t)<r$

ถ้าให้ $\delta=\min\{\mathrm{O}(\alpha_i,\alpha_j,t)|1\le i,j\le n\}$ และ $\varepsilon=\max\{\Theta(\alpha_i,\alpha_j,t)|1\le i,j\le n\}$

ดังนั้น $\delta,\varepsilon>0$ ตอนนี้เราจะได้

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(\alpha,\beta,\rho(t+2\rho t))&\ge\mathrm{O}(\alpha,\alpha_i,t)*\mathrm{O}(\alpha_i,\beta,2\rho t)\\&\ge\mathrm{O}(\alpha,\alpha_i,t)*\mathrm{O}(\alpha_i,\alpha_j,t)*\mathrm{O}(\alpha_j,\beta,t)\\&>(1-r)*\delta*(1-r)\\&>1-s_1 \text{ สำหรับบาง } 0<s_1<1\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\Theta(\alpha,\beta,\rho(t+2\rho t))<r\Diamond\varepsilon\Diamond r\Diamond s_2$ สำหรับบาง $0<s_2<1$

ให้ $s=\max\{s_1,s_2\}$ และ $t'=\rho(t+2\rho t)$ จะได้

$$\mathrm{O}(\alpha,\beta,t')>1-s \text{ และ } \Theta(\alpha,\beta,t')<s \text{ เมื่อ } \alpha,\beta\in\Omega$$

ดังนั้น Ω มีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี □

บทนิยาม 4.8 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) เมื่อสำหรับทุก ๆ $r\in(0,1)$ และ $t\ge0$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $n\ge n_0$ แล้ว $\alpha_n\in B(\alpha,r,t)$ กล่าวคือ $\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha,t)>1-r$ และ $\Theta(\alpha_n,\alpha,t)<r$ ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์แทนคือ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ หรือ $\alpha_n\xrightarrow{(\mathrm{O},\Theta)}\alpha$

ทฤษฎีบท 4.4 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี $\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน Ψ ซึ่งกำหนดโดยระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี (O,Θ) และให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่า ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $t>0$ จะได้ $\lim_{n\to\infty}\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha,t)=1$ และ $\lim_{n\to\infty}\Theta(\alpha_n,\alpha,t)=0$

พิสูจน์ ให้ $t>0$ และลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) เพราะฉะนั้นสำหรับทุก ๆ $r\in(0,1)$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่สำหรับแต่ละ $n\geq n_0$ จะได้ $\left|1-\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha,t)\right|<r$ และ $\left|0-\Theta(\alpha_n,\alpha,t)\right|<r$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha,t)=1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\Theta(\alpha_n,\alpha,t)=0$

กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha,t)=1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}\Theta(\alpha_n,\alpha,t)=0$ สำหรับทุก ๆ $t>0$

ถ้า $\tau\in\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ โดยที่ $\alpha\in\tau$ จะมี $t>0$ และ $r\in(0,1)$ โดยที่ $B(\alpha,r,t)\subset\tau$

จากสมมติฐานจะได้ว่าสำหรับแต่ละ $n\geq n_0$ จะได้

$$\left|1-\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha,t)\right|<r \text{ และ } \left|0-\Theta(\alpha_n,\alpha,t)\right|<r$$

นั่นคือ $\alpha_n\in B(\alpha,r,t)\subset\tau$ สำหรับทุก ๆ $n\geq n_0$

นั่นคือ $\alpha_n\xrightarrow{(\mathrm{O},\Theta)}\alpha$ □

ทฤษฎีบท 4.5 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) ก็ต่อเมื่อลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน $\left(\Psi,\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)_n}\right)$

พิสูจน์ สมมติให้ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ)และ U เป็นย่านใกล้เคียงของ α จะได้ว่ามี $\tau\in\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ โดยที่ $\alpha\in\tau\subset U$ จาก $\tau\in\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ ดังนั้นมี $t>0$ และ $r\in(0,1)$ โดยที่ $B(\alpha,r,t)\subset\tau$ และจากสมมติฐานจะมี $k_0\in\mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $k\geq k_0$ จะได้

$$\mathrm{O}(\alpha_k,\alpha,t)>1-r \text{ และ } \Theta(\alpha_k,\alpha,t)<r$$

พิจารณาบอลเปิด $B(\alpha,r,t)$ จะได้ $\alpha_k\in B(\alpha,r,t)$ และได้อีกว่า $\alpha_k\in B(\alpha,r,t)\subset\tau\subset U$ สำหรับทุก ๆ $k\geq k_0$ นั่นคือลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน $\left(\Psi,\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)_n}\right)$

ในทางกลับกันสมมติให้ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน $\left(\Psi,\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)_n}\right)$ และให้ $r>0$ และ $t>0$

เนื่องจาก $B(\alpha,r,t)$ เป็นย่านใกล้เคียงของ α และ $\alpha_n\to\alpha$ จะได้ว่ามี $k_0\in\mathbb{N}$ โดยที่สำหรับแต่ละ $k\geq k_0$ จะได้ $\alpha_k\in B(\alpha,r,t)$

ดังนั้น $\mathrm{O}(\alpha_k,\alpha,t)>1-r$ และ $\Theta(\alpha_k,\alpha,t)<r$ สำหรับทุก ๆ $k\geq k_0$

นั่นคือ ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) □

ข้อสังเกต 4.5 กำหนดให้ $\left(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \lozenge, \rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี $\Omega \subset \Psi$ และให้ Ω เป็นเซตปิด ถ้า $\alpha \in \bar{\Omega}$ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_n) \in \Omega$ โดยที่ $\alpha_n \to \alpha$ บน $\left(\Psi, \mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}\right)$

บทนิยาม 4.9 กำหนดให้ $\left(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \lozenge, \rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และ $\left(\alpha_n\right)$ เป็นลำดับใน Ψ ดังนั้น $\left(\alpha_n\right)$ เป็นลำดับโคชี ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $r \in \left(0,1\right)$ และ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m,n \geq n_0$ จะได้ $\mathrm{O}\left(\alpha_m, \alpha_n, t\right) > 1 - r$ และ $\Theta\left(\alpha_m, \alpha_n, t\right) < r$ นอกจากนี้วิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีซึ่งทุก ๆ ลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้าจะเป็นปริภูมิบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ $\left(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \lozenge, \rho\right)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและ $\left(\alpha_n\right)$ เป็นลำดับใน Ψ ถ้าลำดับ $\left(\alpha_n\right)$ ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน $\left(\mathrm{O},\Theta\right)$ เมื่อ $\alpha \in \Psi$ แล้ว ลำดับ $\left(\alpha_n\right)$ จะเป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ สมมติให้ $\alpha \in \Psi$ โดยลำดับ $\left(\alpha_n\right)$ ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน $\left(\mathrm{O},\Theta\right)$ และให้ $r > 0$ และ $t > 0$ จะมี $r_1, r_2 \in \left(0,1\right)$ ที่ทำให้ $(1-r_1) * (1-r_1) \geq 1-r$ และ $r_2 \lozenge r_2 \leq r$ ให้ $r^* = \min\left\{r_1, r_2\right\}$

จากสมมติฐาน จะได้ว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้

$$\mathrm{O}\left(\alpha_n, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) > 1 - r^* \text{ และ } \Theta\left(\alpha_n, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) < r^*$$

ถ้าให้ $m \geq n_0$ จะได้ $\mathrm{O}\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) > 1 - r^*$ และ $\Theta\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) > r^*$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \mathrm{O}\left(\alpha_m, \alpha_n, t\right) &\geq \mathrm{O}\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) * \mathrm{O}\left(\alpha, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right) \\ &> \left(1 - r^*\right) * \left(1 - r^*\right) \\ &\geq \left(1 - r_1\right) * \left(1 - r_1\right) \\ &\geq 1 - r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \Theta\left(\alpha_m, \alpha_n, t\right) &\leq \Theta\left(\alpha_m, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) \lozenge \Theta\left(\alpha, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right) \\ &< r^* \lozenge r^* \\ &\leq r_2 \lozenge r_2 \\ &\leq r \end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(x_n\right)$ เป็นลำดับโคชี □

ทฤษฎีบท 4.7 กำหนดให้ $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และ (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ψ ถ้า (α_n) มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแล้ว $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

พิสูจน์ สมมติให้ (α_{i_n}) เป็นลำดับย่อยของลำดับโคชี (α_n) โดยที่ (α_{i_n}) เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ จะแสดงว่า สำหรับทุก ๆ $r \in (0,1)$ และทุก ๆ $t > 0$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้

$$\mathrm{O}(\alpha_n, \alpha, t) > 1 - r \text{ และ } \Theta(\alpha_n, \alpha, t) < r$$

ให้ $r \in (0,1)$ และ $t > 0$ สมมติให้ $r^* \in (0,1)$ โดยที่ $(1-r^*)*(1-r^*) \geq 1-r$ และ $r^* \Diamond r^* \leq r$ เพราะฉะนั้นจะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m, n \geq n_0$ จะได้

$$\mathrm{O}\left(\alpha_m, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right) > 1 - r^* \text{ และ } \Theta\left(\alpha_m, \alpha_n, \frac{t}{2\rho}\right) < r^*$$

เนื่องจาก $\alpha_{i_n} \xrightarrow{(\mathrm{O},\Theta)} \alpha$ จะมี $i_p \in \mathbb{N}$ โดยที่ $i_p \geq n_0$ และได้ว่า

$$\mathrm{O}\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) > 1 - r^* \text{ และ } \Theta\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) < r^*$$

ถ้า $n \geq n_0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(\alpha_n, \alpha, t) &\geq \mathrm{O}\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) * \mathrm{O}\left(\alpha_n, \alpha_{i_p}, \frac{t}{2\rho}\right) \\
&> (1-r^*)*(1-r^*) \\
&\geq 1 - r
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\Theta(\alpha_n, \alpha, t) &\leq \Theta\left(\alpha_{i_p}, \alpha, \frac{t}{2\rho}\right) \Diamond \Theta\left(\alpha_n, \alpha_{i_p}, \frac{t}{2\rho}\right) \\
&< r^* \Diamond r^* \\
&\leq r
\end{aligned}$$

จากนิยามจะได้ $\alpha_n \xrightarrow{(\mathrm{O},\Theta)} \alpha$ ดังนั้น $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ □

บทนิยาม 4.10 กำหนดให้ $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและให้ Ω เป็นปริภูมิย่อยของ Ψ จะกล่าวว่า $(\mathrm{O}_\Omega, \Theta_\Omega)$ นิยามโดย

$$(\mathrm{O}_\Omega, \Theta_\Omega) = \left(\mathrm{O}\Big|_{\Omega \times \Omega \times [0,\infty)}, \Theta\Big|_{\Omega \times \Omega \times [0,\infty)}\right)$$

เป็นระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบีซึ่งถูกจำกัดโดย Ω

ทฤษฎีบท 4.8 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี Ω เป็นปริภูมิย่อยของ Ψ และให้ $(\mathrm{O}_\Omega,\Theta_\Omega)=\left(\mathrm{O}\Big|_{\Omega\times\Omega\times[0,\infty)},\Theta\Big|_{\Omega\times\Omega\times[0,\infty)}\right)$ เป็นระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบีซึ่งถูกจำกัดโดย Ω ดังนั้น $(\Omega,\mathrm{O}_\Omega,\Theta_\Omega,*,\Diamond,\rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ Ω เป็นเซตปิด

พิสูจน์ สมมติให้ Ω เป็นเซตย่อยซึ่งเป็นเซตปิดของ Ψ และลำดับ (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ω เพราะฉะนั้น (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ψ และยังได้อีกว่ามี $\alpha\in\Psi$ โดยที่ $\alpha_n\to\alpha$ บน $T_{(\mathrm{O},\Theta)}$ ดังนั้น $\alpha\in\bar{\Omega}=\Omega$ นั่นคือ (α_n) ลู่เข้าใน Ω และได้อีกว่า $(\Omega,\mathrm{O}_\Omega,\Theta_\Omega,*,\Diamond,\rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์

สมมติให้ $(\Omega,\mathrm{O}_\Omega,\Theta_\Omega,*,\Diamond,\rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์และให้ $\alpha\in\bar{\Omega}$

จะมีลำดับ (α_n) ใน Ω โดยที่ $\alpha_n\to\alpha$ บน $\left(\Psi,T_{(\mathrm{O},\Theta)}\right)$ และได้ว่า (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ψ

ให้ $t>0$ และ $r\in(0,1)$ แล้วจะมี $n_0\in\mathbb{N}$ โดยที่สำหรับทุก ๆ $m,n\ge n_0$ จะได้

$$\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha_m,t)>1-r \text{ และ } \Theta(\alpha_n,\alpha_m,t)<r$$

จาก $\Omega\subseteq\Psi$ นั่นคือสำหรับทุก ๆ $m,n\ge n_0$ จะได้

$$\mathrm{O}_\Omega(\alpha_n,\alpha_m,t)>1-r \text{ และ } \Theta_\Omega(\alpha_n,\alpha_m,t)<r$$

ดังนั้นลำดับ (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ω

เนื่องจาก Ω เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ ดังนั้น $\alpha_n\to\beta$ ใน Ω สำหรับบาง $\beta\in\Omega$

แต่จาก Ω เป็นปริภูมิเฮาส์ดร์อฟ จะได้ว่า $\alpha=\beta\in\Omega$

นั่นคือ $\bar{\Omega}\subset\Omega$ และเห็นได้ชัดว่า $\Omega\subseteq\bar{\Omega}$ ดังนั้น $\Omega=\bar{\Omega}$ □