บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยนี้เราได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ได้ให้นิยามของวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และศึกษาสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ เพื่อให้ได้ข้อสรุปเป็นองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ซึ่งได้ผลการวิจัยเป็นดังนี้

สรุปผลการวิจัย

1. นิยามของวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ $*$ มีความต่อเนื่องแบบนอร์มที $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบโคนอร์มทีและ O, Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi \times \Psi \times (0, \infty)$ โดยที่ O, Θ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

($IFbM_1$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) + \Theta(\alpha, \beta, t) \leq 1$

($IFbM_2$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, 0) = 0$

($IFbM_3$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

($IFbM_4$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = \mathrm{O}(\beta, \alpha, t)$

($IFbM_5$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \geq \mathrm{O}(\alpha, \gamma, t) * \mathrm{O}(\gamma, \beta, s)$

($IFbM_6$) $\mathrm{O}(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางซ้ายและ $\lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{O}(\alpha, \beta, t) = 1$

($IFbM_7$) $\Theta(\alpha, \beta, 0) = 1$

($IFbM_8$) $\Theta(\alpha, \beta, t) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

($IFbM_9$) $\Theta(\alpha, \beta, t) = \Theta(\beta, \alpha, t)$

($IFbM_{10}$) $\Theta(\alpha, \beta, \rho(t+s)) \leq \Theta(\alpha, \gamma, t) \Diamond \Theta(\gamma, \beta, s)$

($IFbM_{11}$) $\Theta(\alpha, \beta, \cdot) : [0, \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางขวาและ $\lim\limits_{t \to \infty} \Theta(\alpha, \beta, t) = 0$

สงวนลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

จะเรียก $(\mathrm{O},\Theta)_b$ ว่าระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric) บน Ψ และเรียก $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ ว่าวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric)

2. นิยามของทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี เซต

$$\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}=\{\Omega\subseteq\Psi \mid \forall\alpha\in\Omega,\exists t>0,\exists r\in(0,1),B(\alpha,r;t)\subseteq\Omega\}$$

จะเป็นทอพอโลยีบน $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$

3. สมบัติต่าง ๆ ของทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

3.1 ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีแล้วจะได้ว่า $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดร์อฟ

3.2 ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้ $\Omega\subseteq\Psi$ โดยที่ Ω เป็นเซตกระชับ Ω บน $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ จะได้ว่า Ω มีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

3.3 ทฤษฎีบท 4.4 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี $\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน Ψ ซึ่งกำหนดโดยระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี (O,Θ) และให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่า ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $t>0$ จะได้ $\lim_{n\to\infty}\mathrm{O}(\alpha_n,\alpha,t)=1$ และ $\lim_{n\to\infty}\Theta(\alpha_n,\alpha,t)=0$

3.4 ทฤษฎีบท 4.5 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) ก็ต่อเมื่อลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน $\left(\Psi,\mathrm{T}_{(\mathrm{O},\Theta)_n}\right)$

3.5 ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ถ้าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha\in\Psi$ บน (O,Θ) เมื่อ $\alpha\in\Psi$ แล้วลำดับ (α_n) จะเป็นลำดับโคชี

3.6 ทฤษฎีบท 4.7 กำหนดให้ $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และ (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ψ ถ้า (α_n) มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแล้ว $(\Psi,\mathrm{O},\Theta,*,\Diamond,\rho)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

3.7 ทฤษฎีบท 4.8 กำหนดให้ $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี Ω เป็นปริภูมิย่อยของ Ψ และให้ $(\mathrm{O}_\Omega, \Theta_\Omega) = \left(\mathrm{O}\big|_{\Omega\times\Omega\times[0,\infty)}, \Theta\big|_{\Omega\times\Omega\times[0,\infty)}\right)$ เป็นระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบีซึ่งถูกจำกัดโดย Ω ดังนั้น $(\Omega, \mathrm{O}_\Omega, \Theta_\Omega, *, \Diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ Ω เป็นเซตปิด

อภิปรายผลการวิจัย

1. คณะผู้วิจัยได้สร้างนิยามวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีซึ่งสอดคล้องกับนิยามวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางที่ได้ถูกนำเสนอโดยจินฮานปาร์ค (2004) ซึ่งมีผลการวิจัย ดังนี้ ให้ Ψ เป็นเซตซึ่ง Ψ ไม่เป็นเซตว่าง $\rho \geq 1$ $*$ มีความต่อเนื่องแบบทีนอร์ม $\Diamond$ มีความต่อเนื่องแบบทีโคนอร์มและ O, Θ เป็นความสัมพันธ์แบบวิภัชนัยบน $\Psi\times\Psi\times(0,\ \infty)$ โดยที่ O, Θ มีสมบัติดังนี้ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta, \gamma \in \Psi$ และ $s, t > 0$

($IFbM_1$) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t) + \Theta(\alpha,\beta,t) \leq 1$

($IFbM_2$) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,0) = 0$

($IFbM_3$) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

($IFbM_4$) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,t) = \mathrm{O}(\beta,\alpha,t)$

($IFbM_5$) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\rho(t+s)) \geq \mathrm{O}(\alpha,\gamma,t) * \mathrm{O}(\gamma,\beta,s)$

($IFbM_6$) $\mathrm{O}(\alpha,\beta,\cdot): [0,\ \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางซ้าย และ $\lim_{t\to\infty} \mathrm{O}(\alpha,\beta,t) = 1$

($IFbM_7$) $\Theta(\alpha,\beta,0) = 1$

($IFbM_8$) $\Theta(\alpha,\beta,t) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = \beta$

($IFbM_9$) $\Theta(\alpha,\beta,t) = \Theta(\beta,\alpha,t)$

($IFbM_{10}$) $\Theta(\alpha,\beta,\rho(t+s)) \leq \Theta(\alpha,\gamma,t) \Diamond \Theta(\gamma,\beta,s)$

($IFbM_{11}$) $\Theta(\alpha,\beta,\cdot): [0,\ \infty) \to [0,1]$ มีความต่อเนื่องทางขวา และ $\lim_{t\to\infty} \Theta(\alpha,\beta,t) = 0$

จะเรียก $(\mathrm{O},\Theta)_b$ ว่าระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric) บน Ψ และเรียก $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ ว่าวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี (Intuitionistic fuzzy b-metric)

2. คณะผู้วิจัยได้สร้างนิยามทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีซึ่งสอดคล้องกับนิยามทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางที่ได้ถูกนำเสนอโดยจินฮานปาร์ค (2004) ซึ่งมีผลการวิจัย ดังนี้ ให้ $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีเซต

$T_{(O,\Theta)} = \left\{ \Omega \subseteq \Psi \middle| \forall \alpha \in \Omega, \exists t > 0, \exists r \in (0,1), B(\alpha, r; t) \subseteq \Omega \right\}$ จะเป็นทอพอโลยีบน $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$

3. คณะผู้วิจัยได้ศึกษาสมบัติเบื้องต้นของทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีซึ่งสอดคล้องกับสมบัติเบื้องต้นของทอพอโลยีบนวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางที่ได้ถูกนำเสนอโดยจินฮานปาร์ค (2004) ซึ่งมีผลการวิจัย ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีแล้วจะได้ว่า $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิเฮาส์ดร์อฟ

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และให้ $\Omega \subseteq \Psi$ โดยที่ Ω เป็นเซตกระชับ Ω บน $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ จะได้ว่า Ω มีขอบเขตแบบวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี

ทฤษฎีบท 4.4 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี $T_{(O,\Theta)}$ เป็นทอพอโลยีบน Ψ ซึ่งกำหนดโดยระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบี (O,Θ) และให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่า ลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O,Θ) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $t > 0$ จะได้ $\lim_{n \to \infty} O(\alpha_n, \alpha, t) = 1$ และ $\lim_{n \to \infty} \Theta(\alpha_n, \alpha, t) = 0$

ทฤษฎีบท 4.5 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและให้ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ จะได้ว่าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O,Θ) ก็ต่อเมื่อลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน $\left(\Psi, T_{(O,\Theta)_n}\right)$

ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีและ (α_n) เป็นลำดับใน Ψ ถ้าลำดับ (α_n) ลู่เข้าสู่ $\alpha \in \Psi$ บน (O,Θ) เมื่อ $\alpha \in \Psi$ แล้วลำดับ (α_n) จะเป็นลำดับโคชี

สงวนลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ทฤษฎีบท 4.7 กำหนดให้ $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี และ (α_n) เป็นลำดับโคชีใน Ψ ถ้า (α_n) มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแล้ว $(\Psi, O, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 4.8 กำหนดให้ $(\Psi, \mathrm{O}, \Theta, *, \Diamond, \rho)$ เป็นวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี Ω เป็นปริภูมิย่อยของ Ψ และให้ $(\mathrm{O}_\Omega, \Theta_\Omega) = \left(\mathrm{O}\big|_{\Omega\times\Omega\times[0,\infty)}, \Theta\big|_{\Omega\times\Omega\times[0,\infty)}\right)$ เป็นระยะทางเชิงวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกแบบบีซึ่งถูกจำกัดโดย Ω ดังนั้น $(\Omega, \mathrm{O}_\Omega, \Theta_\Omega, *, \Diamond, \rho)$ เป็นปริภูมิย่อยบริบูรณ์ก็ต่อเมื่อ Ω เป็นเซตปิด

ข้อเสนอแนะ

วิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบี สามารถใช้เป็นแนวทางศึกษาและแนวทางในการวิจัยของนักวิจัยต่อไป เช่น

1. สามารถศึกษางานวิจัยเรื่อง Intuitionistic fuzzy 2-metric space ของ มูซาลีน โลฮานีและโมฮุดดีน (2009) เพื่อขยายวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิอิงระยะทางแบบบีไปบนปริภูมิอิง 2-ระยะทาง
2. ศึกษาวิภัชนัยอินทิวชันนิสติกบนปริภูมิต่าง ๆ

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี