บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แนวคิดเกี่ยวกับงานวิจัย

การสร้างและพัฒนาวิธีการทำซ้ำที่สามารถแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุดของฟังก์ชัน และนำมาประยุกต์กับปัญหาการทำภาพมัวให้ชัดเจนได้นั้น ต้องมีลักษณะใช้งานง่ายไม่ซับซ้อนและเหมาะสมกับภาพมัวแบบต่าง ๆ เช่น ภาพมัวแบบ Gaussian และภาพมัวแบบ Motion ตลอดจนมีทฤษฎีการลู่เข้าเพื่อยืนยันการมีอยู่จริงของผลเฉลย

ดังนั้นในบทนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษารายละเอียดที่สำคัญของที่มาของปัญหาวิจัย ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับปัญหางานวิจัย และงานวิจัยของนักวิจัยที่เกี่ยข้องกับการประมาณค่าเพื่อหาผลเฉลยของ ปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุด ปัญหาจุดตรึง ปัญหาการหาผลเฉลยร่วมของสองตัวดำเนินการ ปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพ และปัญหาการทำภาพมัวให้ชัดเจน ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน และกรอบแนวความคิดของปัญหาวิจัย โดยมีสาระสำคัญดังต่อไปนี้

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุด

กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลต์เบิร์ต และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ให้ $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่างแท้ ปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุดแบบคอนเวกซ์ซึ่งนิยามดังนี้

หาค่า $\tilde{x} \in \mathcal{H}$ โดยสอคคล้องกับเงื่อนไข

$$f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) = \min_{x \in \mathcal{H}} \{f(x) + g(x)\} \tag{2.1}$$

จากปัญหาข้างต้นมีการแก้ไขปัญหาโดยใช้กฎของแฟร์มาร์ (Fermat’s rule) ซึ่งเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ดังนี้

หาค่า $\tilde{x} \in \mathcal{H}$ โดยสอคคล้องกับเงื่อนไข

$$0 \in \nabla f(\tilde{x}) + \partial g(\tilde{x}) \tag{2.2}$$

โดยที่ ∇f เป็นเกรเดียนต์ (gradient) ของฟังก์ชัน f และ ∂g เป็นอนุพันธ์ย่อย (subdifferntial) ของฟังก์ชัน g

ปัญหาจุดตรึง

กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลต์เบิร์ต และ T เป็นการส่งจาก $\mathcal{H}$ ไป $\mathcal{H}$ จะกล่าวว่า x เป็นจุดตรึงของ T ก็ต่อเมื่อ $x = Tx$ ซึ่งปัญหาจุดตรึงยังเป็นหัวข้อที่สำคัญของปัญหาวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น ซึ่งการแก้ปัญหาของจุดตรึงจะใช้วิธีการทำซ้ำ นอกจากนี้ ปัญหาในลักษณะนี้มีความสำคัญมากในการหาผลเฉลยของปัญหาต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ดังนั้นจึงมีการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาจุดตรึงและพยายามหาผลเฉลยด้วยวิธีการทำซ้ำต่าง ๆ

ปัญหาการหาผลเฉลยร่วมกันของสองตัวดำเนินการ

กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลต์เบิร์ต ปัญหาการร่วมกันของสองตัวดำเนินการ (inclusion problem) คือการหาผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยร่วมกันของสองตัวดำเนินการ ซึ่งนิยามดังนี้

หาค่า $\tilde{x} \in \mathcal{H}$ โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$0 \in A\tilde{x} + B\tilde{x} \tag{2.3}$$

โดยที่ $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ และ $B : \mathcal{H} \longrightarrow 2^{\mathcal{H}}$ ปัญหาการร่วมกันของสองตัวดำเนินการเป็นส่วนหนึ่งของปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุด ปัญหาอสมการแปรผัน (variational inequality problem) และปัญหาดุลยภาพ (equilibrium problem)

ปัญหาอสมการแปรผัน

ปัญหาอสมการแปรผัน คือ ปัญหาการหาสมาชิก $\tilde{x} \in C$ ที่ทำให้

$$\langle A\tilde{x}, y - \tilde{x}\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{2.4}$$

จากปัญหา (2.4) เป็นที่ทราบกันว่า

$\tilde{x}$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4) ก็ต่อเมื่อ $\tilde{x} = P_C(\tilde{x} - \lambda A\tilde{x})$

เมื่อ $\lambda > 0$ และ P_C เป็นภาพฉายระยะทาง (metric projection) บนเซต C ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นว่าปัญหาอสมการแปรผันมีความสัมพันธ์กับปัญหาจุดตรึง

ปัญหาดุลยภาพ

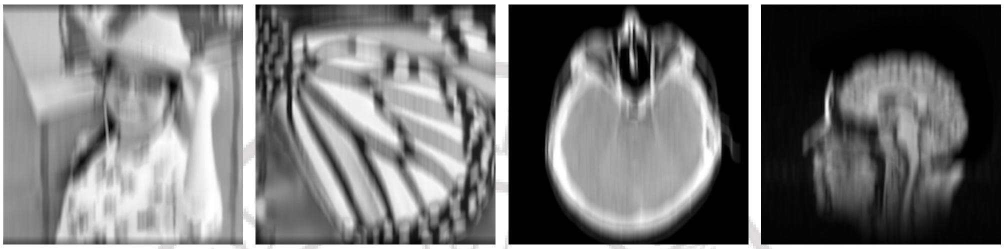
ปัญหาดุลยภาพ คือ ปัญหาการหาสมาชิกของ $\tilde{x} \in C$ ที่ทำให้

$$F(\tilde{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{2.5}$$

โดยที่ $F : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง ปัญหาดังกล่าวมีความสำคัญมาก โดยเฉพาะทางเศรษฐศาสตร์ที่ได้ปัญหานี้ไปประยุกต์ใช้

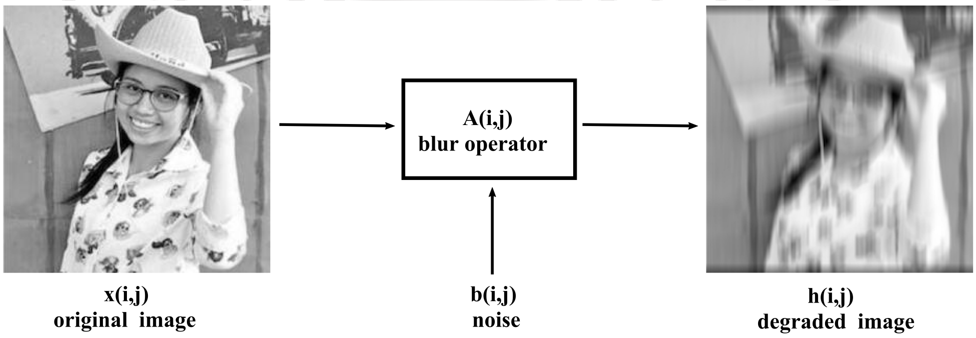
ปัญหาภาพมัว

ในปัจจุบันมีการถ่ายภาพต่าง ๆ ทั้งที่มาจากกล้องหรือการสแกนบางทีอาจจะได้ภาพที่มีลักษณะเป็นภาพมัว หรือมีจุดต่าง ๆ ที่ทำให้ภาพนั้นสื่อความหมายที่ผิดไป ดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 ภาพมัว

จากปัญหาข้างต้นสามารถนำมาเขียนในรูปโมเดลทางคณิตศาสตร์ได้ดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 โมเดลภาพมัว

โดยที่ $x(i,j)$ คือภาพไม่มัว $A(i,j)$ คือฟังก์ชันที่เกิดจากมัว $b(i,j)$ คือจุดที่ทำให้ภาพเสีย และ $h(i,j)$ คือภาพมัว นำมาเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$h = Ax + b \tag{2.6}$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^n$ คือค่าของภาพไม่มัวที่ยังไม่ทราบค่า b คือค่าของจุดที่ให้ภาพเสียที่มาจากการสุ่มยังไม่ทราบค่า และ h คือค่าของภาพมัวที่ทราบค่า นอกจากนี้ยังมีฟังก์ชัน A ที่เป็นฟังก์ชันมัวแบบเชิงเส้น

ในการแก้ปัญหา (2.6) เพื่อหาผลเฉลย ทิบชิรานิ (Tibshirani, 1996 : 267-288) ได้นำเสนอวิธีการ LASSO (least absolute shrinkage and selection operator) ในการแก้ปัญหาในรูปแบบปัญหาการหาค่าต่ำที่สุด ดังนี้

$$\min_x \frac{1}{2}\|Ax - h\|_2^2 + \mu\|x\|_1, \tag{2.7}$$

ซึ่ง $\mu > 0$ เป็นพารามิเตอร์ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ และ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

ชนิดของภาพมัว

ในงานวิจัยนี้ศึกษาภาพมัว 2 แบบ คือ

1. ภาพมัวแบบ Gaussian คือ ภาพที่เป็นผลมาจากการทำให้ภาพมัวโดยฟังก์ชัน Gaussian (ตั้งชื่อตาม โยฮัน คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน)

2. ภาพมัวแบบ Motion คือ การปรากฏเป็นริ้วของวัตถุที่เคลื่อนไหวในภาพถ่าย หรือ ลำดับของเฟรม เช่น ภาพยนตร์ หรือ แอนิเมชั่น จะเกิดขึ้นเมื่อภาพที่บันทึกมีการเปลี่ยนแปลงระหว่างการบันทึกจากการเคลื่อนไหวอย่างรวดเร็ว หรือ จากการเปิดรับแสงเป็นเวลานาน

ความรู้พื้นฐาน นิยาม และทฤษฎีบทการลู่เข้า

ในการวิจัยได้ศึกษาวิธีการทำซ้ำในปริภูมิฮิลต์เบิร์ต ซึ่งมีการศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปริภูมิฮิลต์เบิร์ต ตลอดจนนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ใช้ในการพิสูจน์ ดังนี้

บทนิยาม 2.1 (Takahashi, 2009) ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ เรียกว่า ผลคูณภายใน (inner product) บนปริภูมิเวกเตอร์ X สำหรับสมาชิก $x, y, z \in X$ และค่าคงตัว $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ สำหรับทุก $x \in X$

(ii) $\langle x, x \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iv) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

ปริภูมิเวกเตอร์ X และผลคูณภายใน $\langle \cdot, \cdot \rangle$ เขียนร่วมกันได้ $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ซึ่งเรียกว่า ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space)

นอกจากนี้ได้ศึกษาสมบัติบางประการของลำดับการลู่เข้าในปริภูมิฮิลเบิร์ต $\mathcal{H}$ โดยเริ่มจากบทตั้งและทฤษฎีบทต่อไปนี้ที่ใช้ในการพิสูจน์

บทตั้ง 2.2 (Takahashi, 2009) กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$\|\alpha x + \rho z\|^2 = \alpha(\alpha + \rho)\|x\|^2 + \rho(\alpha + \rho)\|z\|^2 - \rho\alpha\|x - z\|^2, \ \forall x, z \in \mathcal{H}, \forall \alpha, \rho \in \mathbb{R}$$

การดำเนินการไม่เชิงเส้น $T : C \longrightarrow C$ จะถูกเรียกว่า

(i) การดำเนินการ $L-$ลิพชิทซ์ ถ้ามี $L > 0$ ซึ่ง

$$\|Tx - Tz\| \leq L\|x - z\|, \quad \text{for all } x, z \in C;$$

(ii) การดำเนินการแบบไม่ขยาย ถ้า

$$\|Tx - Tz\| \leq \|x - z\|, \quad \text{for all } x, z \in C.$$

กำหนดให้ $\omega_w(x_n)$ เป็นเซตของจุดคลัสเตอร์แบบอ่อนทั้งหมดของลำดับที่มีขอบเขต $\{x_n\}$ ใน C มี $\{T_n\}$ และ Ψ เป็นวงศ์ของการดำเนินการแบบไม่ขยายภายในของ C ซึ่ง $\Omega := \bigcap_{n=1}^{\infty} Fix(T_n) \supset Fix(\Psi) \neq \emptyset$ เมื่อ $Fix(\Psi)$ เป็นเซตจุดตรึงร่วมทั้งหมดของ Ψ.

นาคาโจ (Nakajo et al., 2007 : 11-34) ได้นำเสนอเงื่อนไข NST (I) ด้วย Ψ ซึ่ง ลำดับ $\{T_n\}$ จะกล่าวว่าสอดคล้องกับเงื่อนไข NST ถ้าทุกลำดับที่มีขอบเขต $\{x_n\}$ ใน C มีสมบัติดังนี้

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0 \quad \text{implies} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0, \quad \forall\, T \in \Psi.$$

นาคาโจ (Nakajo et al., 2009 : 112-119) ได้นำเสนอเงื่อนไข NST* ด้วย Ψ ซึ่ง ลำดับ $\{T_n\}$ จะกล่าวว่าสอดคล้องกับเงื่อนไข NST ถ้าทุกลำดับที่มีขอบเขต $\{x_n\}$ ใน C มีสมบัติดังนี้

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - T_n x_n\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0 \quad \text{implies} \quad \omega_w(x_n) \subset \Omega.$$

บทตั้ง 2.3 (Moudafi, & Al-Shemas, 2013) กำหนดให้ C เป็นเซตไม่ว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต $\mathcal{H}$ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในปริภูมิฮิลเบิร์ต $\mathcal{H}$ โดยที่ข้อความสองข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(i) สำหรับทุก ๆ $x \in \mathcal{H}$ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x\|$ หาค่าได้

(ii) ทุกจุดคลัสเตอร์แบบอ่อนของลำดับ $\{x_n\}$ อยู่ใน C

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดใน C

บทตั้ง 2.4 (Bussaban et al., 2020) สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง $\mathcal{H}$, กำหนดให้ $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นการส่งแบบคอนเวกซ์และกึ่งต่อเนื่องล่าง และ $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ คอนเวกซ์และหาอนุพันธ์ได้ โดยที่ ∇f เป็นการส่งแบบ $L-$ลิพชีทเชียน ซึ่ง $L > 0$ ถ้า $\{T_n\}$ เป็นการดำเนินการไปข้างหน้า-ย้อนกลับของฟังก์ชัน f และ g ขึ้นอยู่กับตัวแปร $r_n \in (0, 2/L)$ ซึ่ง r_n ลู่เข้าสู่ r แล้ว $\{T_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข NST (I) ด้วย T เมื่อ T เป็นการดำเนินการ
ไปข้างหน้า-ย้อนกลับของฟังก์ชัน f และ g ขึ้นอยู่กับตัวแปร $r \in (0, 2/L)$.

บทตั้ง 2.5 (Mainge, 2008) กำหนดให้ $\{\upsilon_n\}, \{\delta_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, \infty)$ โดยที่

$$\{\upsilon_{n+1}\} \leq \upsilon_n + \theta_n(\upsilon_n - \upsilon_{n-1}) + \delta_n, \ \forall n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

และจะมีจำนวนจริง θ ที่สอดคล้องกับ $0 \leq \theta_n \leq \theta < 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
ดังนั้นข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}[\upsilon_n - \upsilon_{n-1}]_+ < +\infty,$ โดยที่ $[t]_+ := \max\{t, 0\}$

(ii) จะมี $\upsilon^* \in [0, +\infty)$ โดยที่ $\lim_{n \longrightarrow \infty} \upsilon_n = \upsilon^*$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในทฤษฎีการหาค่าเหมาะที่สุดสามารถแก้ปัญหาที่เป็นรูปธรรมได้หลายรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(x) + g(x) \\ &\text{subject to } x \in C \end{aligned} \tag{2.8}$$

ซึ่งฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์และสามารถหาอนุพันธ์ได้

ในการแก้ปัญหา (2.8) เพื่อหาผลเฉลยนั้น สามารถดำเนินการได้ตามทฤษฎีบท 16.3 ของเบาสช์เก และ คอมเบตตส์ (Bauschke & Combettes, 2011) ดังนี้

$$w \text{ เป็นค่าที่ทำให้ } (f+g) \text{ มีค่าน้อยที่สุด ก็ต่อเมื่อ } 0 \in \partial g(w) + \nabla f(w) \tag{2.9}$$

ซึ่ง ∂g เป็นอนุพันธ์ย่อย (subdifferential) ของ g และ ∇f เป็นเกรเดียนต์ (gradient) ของ f อนุพันธ์ย่อยของ g ที่ w เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\partial g(w)$ ซึ่งนิยาม ดังนี้

$$\partial g(w) := \{z : g(x) \geq \langle z, x - w\rangle + g(w)\} \tag{2.10}$$

เป็นที่ทราบกันดีกว่า อนุพันธ์ย่อยของ ∂g เป็นค่ามากที่สุดทางเดียว ตามการนำเสนอของบูราชิค (Burachik & Lusem, 2007) สำหรับการแก้ปัญหา (2.8) เพื่อหาผลเฉลยนั้น สามารถใช้รูปแบบการแก้ปัญหาจุดตรึง ดังนี้

$$w \text{ เป็นค่าที่ทำให้ } (f+g) \text{ มีค่าน้อยที่สุด ก็ต่อเมื่อ } \text{prox}_{rg}(w - r\nabla f(w)) \tag{2.11}$$

สำหรับทุก $\lambda > 0$ และ prox_g เป็นตัวดำเนินการแบบใกล้เคียง g ซึ่งนิยาม ดังนี้

$$\text{prox}_g(x) = \arg\min_z \left\{ g(z) + \frac{\|x - z\|^2}{2} \right\} \tag{2.12}$$

แม้ปัญหา (2.8) จะมีรูปแบบที่เรียบง่าย แต่ครอบคลุมหลายปัญหา เช่นการกู้คืนสัญญาณ (Signal processing) (Combettes et al., 2010 : 373-404) สามารถแก้ปัญหาโดยใช้สมการต่อไปนี้

$$x = \text{prox}_{\lambda f}(x - \lambda \nabla g(x)) \tag{2.13}$$

สำหรับทุก $\lambda > 0$ และนำไปสู่กระบวนการทำซ้ำต่อไปนี้

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n f}(x_n - \lambda_n \nabla g(x)) \tag{2.14}$$

โดยที่ $\lambda_n > 0$ เป็นพารามิเตอร์ วิธีการทำซ้ำรูปแบบนี้เรียกว่า วิธีการทำซ้ำแบบแยกไปข้างหน้า-ย้อนกลับ โดยใช้คำศัพท์ตามโครงสร้างที่เป็นแบบแยกในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Varga, 2000 : 1-358) สามารถแบ่งออกได้ดังนี้ ขั้นตอนเกรเดียนต์ไปข้างหน้า (Forward gradient step) โดยใช้ฟังก์ชัน และขั้นตอนย้อนกลับ โดยใช้ฟังก์ชัน

ในทางกลับกันวิธีการทำซ้ำแบบแยกซึ่งหมายถึงวิธีการทำซ้ำแต่ละครั้งจะเกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ย่อยของ f และเกรเดียนต์ของ g แต่ไม่ได้รวมกัน วิธีการทำซ้ำแบบแยกสำหรับสมการเชิงเส้นซึ่งนำเสนอโดย พีซแมน และรัชฟอร์ด (Peaceman & Rachford, 1955 : 28-41) เพื่อความแม่นยำยิ่งขึ้น พีซแมน และรัชฟอร์ด (Douglas & Rachford, 1956 : 421-439) ได้นำเสนอทฤษฎีและวิธีการทำซ้ำแบบแยกไปข้างหน้า-ถอยกลับซึ่งสร้างลำดับ $\{x_n\}$ ได้ดังนี้

$$x_{n+1} = (2\,\text{prox}_{\lambda f} - I)(2\,\text{prox}_{\lambda g} - I)x_n, \quad \forall n \geq 1 \tag{2.15}$$

โดยที่ $\text{prox}_{\lambda f}$ และ $\text{prox}_{\lambda g}$ เป็นตัวดำเนินการใกล้เคียงของ f และ g ตามลำดับ
จะเห็นว่าวิธีการทำซ้ำที่ (2.14) ลู่เข้าสู่ค่าต่ำสุดของ $f + g$

ดักลาส และราชฟอร์ด (Douglas & Rachford, 1956 : 421-439) ยังได้นำเสนอวิธีการทำซ้ำแบบแยกดักลาส-ราชฟอร์ด (Douglas-Rachford splitting method) ดังนี้

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda f}(2\,\text{prox}_{\lambda g} - I)(2\,\text{prox}_{\lambda g} - I)x_n, \quad \forall n \geq 1 \tag{2.16}$$

โดยที่ $\text{prox}_{\lambda f}$ และ $\text{prox}_{\lambda g}$ เป็นตัวดำเนินการใกล้เคียงของ f และ g ตามลำดับ
จะเห็นว่าวิธีการทำซ้ำที่ (2.15) และ วิธีการทำซ้ำที่ (2.16) ลู่แบบอ่อนเข้าสู่ค่าต่ำสุดของ $f + g$

ส่วนขยายของสมการไม่เชิงเส้นในปริภูมิฮิลเบิร์ตถูกดำเนินการโดย เคลล็อก (Kellogg, 1969 : 23-28) และ ไลออนส์ และ เมอร์เซียร์ (Lions & Mercier, 1979 : 964-979) ได้นำเสนอทฤษฎีและวิธีการทำซ้ำย้อนกลับ-ย้อนกลับ เป็นอีกทฤษฎีและวิธีหนึ่งที่สำคัญที่ใช้เทคนิคการส่งแบบใกล้เคียงและมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda f}(\text{prox}_{\lambda g}(x_n)), \quad \forall n \geq 1 \tag{2.17}$$

ซึ่งฟังก์ชันวัตถุประสงค์ $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ ทฤษฎีและวิธีการทำซ้ำนี้เหมาะสำหรับวิธีภาพฉายแบบสลับซึ่งถูกวิเคราะห์เป็นครั้งแรกโดย เชนีย์ และ โกลด์สไตน์ (Cheney & Goldstein, 1959 : 448-450)

โพลยาค (Polyak, 1964 : 1-17) ได้นำเสนอทฤษฎีและวิธีลูกบอลหนักซึ่งเป็นวิธีการทำซ้ำสองครั้งสำหรับการฟังก์ชันแบบคอนเวกซ์เรียบ ดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} = y_n - \lambda_n \nabla f(x_n), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

โดยที่ $\theta_n \in [0, 1)$ เป็นปัจจัยการคาดการณ์และเป็นพารามิเตอร์ที่จะต้องเลือกให้มีขนาดเล็กพอสมควร

มูดาฟี และ โอลินี (Moudafi & Oliny, 2003 : 447-454) ได้นำเสนอทฤษฎีและวิธีการทำซ้ำที่เรียกว่า การส่งแบบเฉื่อย (Inertial) ซึ่งก็คืออีกชื่อหนึ่งของวิธีลูกบอลหนัก ดังนี้

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda f}(y_n - \lambda_n \nabla g(x_n)), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{2.19}$$

และได้พิสูจน์ว่าวิธีการทำซ้ำนี้ลู่เข้าสู่ค่าต่ำสุดของ $f + g$ ซึ่ง $\lambda_n < \dfrac{1}{L}$ โดยที่ L เป็นค่าคงที่ลิพชิทซ์ของ ∇g

เนสเตอรอฟ (Nesterov, 1983 : 543-547) ได้เสนอทฤษฎีและวิธีที่ดีที่สุดโดย การปรับเปลี่ยนวิธีการทำซ้ำลูกบอลหนักเพื่อปรับปรุงอัตราการลู่เข้าบนฟังก์ชันแบบคอนเวกซ์เรียบ ดังนี้

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} = y_n - \lambda_n \nabla g(y_n), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{2.20}$$

โดยที่ $\lambda_n < \dfrac{1}{L}$ และ $\theta_n \in [0, 1)$ จะเห็นว่าทฤษฎีและวิธีการทำซ้ำที่ดีที่สุดโดย เนสเตอรอฟ มีความแตกต่างจากวิธีการทำซ้ำลูกบอลหนักที่นำเสนอโดย โพลยาค และยังพิสูจน์ได้ว่าทฤษฎีและวิธีการทำซ้ำที่ดีที่สุดของเนสเตอรอฟให้อัตราการลู่เข้าที่ดี อย่างไรก็ตาม มีข้อสังเกตว่า ค่าคงที่ลิพชิทซ์ที่ไม่รู้จักนั้นโดยทั่วไปค่อนข้างยากที่จะประมาณค่า กูเลอร์ (Guler, 1992 : 649-664) ได้ใช้แนวคิดนี้เป็นการตั้งค่าทั่วไปของการส่งจุดแบบใกล้เคียง สำหรับฟังก์ชันแบบคอนเวกซ์ เบ็คและเตบูลล์ (Beck & Teboulle, 2009 : 183-202) ได้นำเสนอทฤษฎีและวิธีที่เรียกว่า FISTA (fast iterative shrinkage-thresholding algorithm) ที่รวมความคิดของ เนสเตอรอฟ และ กูเลอร์ ในรูปแบบของทฤษฎีและวิธีการทำซ้ำแบบแยกไปข้างหน้า-ย้อนกลับ ดังนี้

$$\begin{cases} u_0 = x_0, t_0 = 1, \\ x_n = \text{prox}_{\lambda_n f}(u_n - \lambda_n \nabla g(u_n)), \\ t_{n+1} = \dfrac{1 + \sqrt{4t_n^2 + 1}}{2}, \\ \theta_n = 1 + \dfrac{t_n - 1}{t_{n+1}}, \\ u_{n+1} = x_n + \theta_n(x_{n+1} - x_n), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{2.21}$$

เวอร์มา และ ชุคลา (Verma & Shukla, 2017 : 98-103) ได้นำเสนอทฤษฎีและวิธีที่เรียกว่า NAGA (a new accelerated proximal gradient algorithm) ดังนี้

$$\begin{cases} z_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} = T_n((1-\delta_n)z_n + \delta_n T_n z_n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2.22}$$

เมื่อ $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, T_n เป็นการดำเนินการไปข้างหน้า-ย้อนกลับของฟังก์ชัน f และ g ขึ้นอยู่กับตัวแปร $r_n \in (0, 2/L)$ พร้อมทั้งได้พิสูจน์การลู่เข้าของ NAGA และนำไปใช้กับการแก้ปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบคอนเวกซ์