บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการวิจัย

จากการวิจัยได้วิธีการทำซ้ำใหม่ ในการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุด ปัญหาการหาผลเฉลยร่วมของสองตัวดำเนินการ ปัญหาอสมการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพ ในปริภูมิฮิลเบิร์ต และนำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาการกู้คืนภาพ ในโครงการนี้ ผู้วิจัยได้สร้างวิธีการทำซ้ำใหม่ ในการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาข้างต้น พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้า โดยสรุปเนื้อหาสารสำคัญ ดังต่อไปนี้

วิธีการทำซ้ำใหม่

ทฤษฎีบท 1. $\{T_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}$ เป็นวงศ์การดำเนินการแบบไม่ขยาย สมมติ $\{T_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข NST* และ $\Omega := \bigcap_{n=1}^{\infty} Fix(T_n) \neq \emptyset$ กำหนดให้ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นสมาชิกของ $\mathcal{H}$ นิยามดังนี้

เลือก $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ และใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1-\tau_n)x_n + \tau_n\left((1-\gamma_n)w_n + \gamma_n T_n w_n\right), \\ x_{n+1} = (1-\delta_n)x_n + \delta_n\left((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n T_n z_n\right), \end{cases} \tag{4.1}$$

โดยที่ลำดับ $\{\tau_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\lambda_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$(i)\ \ 0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq 1$

$(ii)\ \ 0 < \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\alpha} := \epsilon, \alpha > 0$

$(iii)\ \ 0 < \gamma \leq \gamma_n \leq \rho < 1$

$(iv)\ \ 0 < \delta \leq \delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\beta} := \varepsilon, \beta > 0$

$(v)\ \ 0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \iota < 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4.1) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุด $w \in \Omega$

โครงการวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญประการหนึ่ง คือ การสร้างทฤษฎีบทการลู่เข้าของวิธีการทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่สู่ผลเฉลยของปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุด และยังมีการขยายผลไปสู่การแก้ปัญหาดุลยภาพ ปัญหาการหาผลเฉลยร่วมของสองตัวดำเนินการ และปัญหาอสมการแปรผัน ด้วย โดยได้ผลสรุปดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 $\{T_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}$ เป็นวงศ์การดำเนินการแบบไม่ขยาย สมมติ $\{T_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข NST* และ $\Omega := \bigcap_{n=1}^{\infty} Fix(T_n) \neq \emptyset$ กำหนดให้ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นสมาชิกของ $\mathcal{H}$ นิยามดังนี้

เลือก $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ และใช้วิธีการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1-\tau_n)x_n + \tau_n \left((1-\gamma_n) + w_n + \gamma_n \operatorname{prox}_{\varsigma} \Psi(I - \varsigma\nabla\Phi)w_n\right), \\ x_{n+1} = (1-\delta_n)x_n + \delta_n \left((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n \operatorname{prox}_{\varsigma} \Psi(I - \varsigma\nabla\Phi)z_n\right), \end{cases} \tag{4.2}$$

โดยที่ลำดับ $\{\tau_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\lambda_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

(i) $0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq 1$

(ii) $0 < \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\alpha} := \epsilon, \alpha > 0$

(iii) $0 < \gamma \leq \gamma_n \leq \rho < 1$

(iv) $0 < \delta \leq \delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\beta} := \varepsilon, \beta > 0$

(v) $0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \iota < 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4.2) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุด $w \in \Omega$

ได้นำวิธีการทำซ้ำใหม่ในทฤษฎีบท 3.1 มาใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าเหมาะสมต่ำสุดและการทำภาพมัวให้ชัดขึ้น โดยกำหนดให้ $T_n = \operatorname{prox}_{\varsigma} \Psi(I - \varsigma\nabla\Phi)$ ซึ่งเป็นการส่งแบบไปข้างหน้า-ย้อนกลับของตัวดำเนินการ Ψ และ Φ, ที่ขึ้นอยู่กับค่าคงตัว ς และ $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ เป็นการส่งแบบคอนเวกซ์แท้ และกึ่งต่อเนื่องล่าง $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และเกรเดียนของฟังก์ชัน Φ เป็นความต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์ $(L > 0)$

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ เป็นการส่งแบบผกผันทางเดียวแบบเข้ม$-\alpha$ ($\alpha-$inverse strongly monotone mapping) โดยที่ $2\alpha = r > 0$ และให้ $B : \mathcal{H} \longrightarrow 2^{\mathcal{H}}$ เป็นการส่งแบบมากสุดทางเดียว (maximal monotone opertor) สมมติให้ Ω เป็นเซตผลเฉลยของปัญหาค่าต่ำสุดของ A และ B โดยที่ $\Omega = (A+B)^{-1}(0) \neq \varnothing$ สำหรับ $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ ได้นิยามวิธีการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1-\tau_n)x_n + \tau_n \left((1-\gamma_n)w_n + \gamma_n J^B_{r_n}(w_n - r_nA(w_n))\right), \\ x_{n+1} = (1-\delta_n)x_n + \delta_n \left((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n J^B_{r_n}(z_n - r_nA(z_n))\right), \end{cases} \tag{4.3}$$

โดยที่ลำดับ $\{\tau_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\lambda_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

(i) $0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq 1$

(ii) $0 < \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\alpha} := \epsilon, \alpha > 0$

(iii) $0 < \gamma \leq \gamma_n \leq \rho < 1$

$(iv)\ \ 0 < \delta \leq \delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\beta} := \varepsilon, \beta > 0$

$(v)\ \ 0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \iota < 1$

$(vi)\ \ \liminf_{n\longrightarrow\infty} r_n \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} r_n < 2L$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4.3) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุด $w \in \Omega$

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ C เป็นเซตย่อยไม่ว่าง ปิด คอนเวกซ์ ของ $\mathcal{H}$ ให้ $F : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $A(1) - A(4)$ โดยที่ $EP(F) \neq \varnothing$ สำหรับ $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ ได้นิยามวิธีการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1-\tau_n)x_n + \tau_n\left((1-\gamma_n)w_n + \gamma_n T_{r_n} w_n\right), \\ x_{n+1} = (1-\delta_n)x_n + \delta_n\left((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n T_{r_n} z_n\right), \end{cases} \tag{4.4}$$

โดยที่ลำดับ $\{\tau_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\lambda_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$(i)\ \ 0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq 1$

$(ii)\ \ 0 < \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\alpha} := \epsilon, \alpha > 0$

$(iii)\ \ 0 < \gamma \leq \gamma_n \leq \rho < 1$

$(iv)\ \ 0 < \delta \leq \delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\beta} := \varepsilon, \beta > 0$

$(v)\ \ 0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \iota < 1$

$(vi)\ \ \liminf_{n\longrightarrow\infty} r_n \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} r_n < 2L$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4.4) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุด $w = P_{EP(F)}x_n$ โดยที่ $P_{EP(F)} : \mathcal{H} \longrightarrow EP(F)$ เป็นภาพฉายระยะทางจาก $\mathcal{H}$ ไปยังเซต $EP(F)$

ทฤษฎีบท 4.4 กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ C เป็นเซตย่อยไม่ว่าง ปิด คอนเวกซ์ ของ $\mathcal{H}$ ให้ $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ เป็นการส่งแบบ $L-$ลิพชิทเชียนทางเดียว (monotone $L-$Lipschitz opertor) และให้ $\varphi \in (0, 1/L)$ สำหรับ $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ ได้นิยามวิธีการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1-\tau_n)x_n + \tau_n\left((1-\gamma_n)w_n + \gamma_n P_C(w_n - \varphi A w_n)\right), \\ x_{n+1} = (1-\delta_n)x_n + \delta_n\left((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n P_C(z_n - \varphi A z_n)\right), \end{cases} \tag{4.5}$$

โดยที่ลำดับ $\{\tau_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\lambda_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$(i)\ \ 0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq 1$

(ii) $0 < \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\alpha} := \epsilon, \alpha > 0$

(iii) $0 < \gamma \leq \gamma_n \leq \rho < 1$

(iv) $0 < \delta \leq \delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\beta} := \varepsilon, \beta > 0$

(v) $0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \iota < 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4.5) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุด $w = P_C x_n$ โดยที่ $P_C : \mathcal{H} \longrightarrow C$ เป็นภาพฉายระยะทางจาก $\mathcal{H}$ ไปยังเซต C

ทฤษฎีบท 4.5 กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ คอนเวกซ์และหาอนุพันธ์ได้ โดยที่ ∇f เป็นการส่งแบบ $1/L-$ลิพชีทเชียนต่อเนื่อง และ $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นการส่งแบบ คอนเวกซ์และกึ่งต่อเนื่องล่าง โดยที่เซตผลเฉลยแทนด้วย $\Omega := (\nabla f + \partial g)^{-1}(0)$ สำหรับ $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ ได้นิยามวิธีการทำซ้ำดังนี้

เลือก $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ และใช้วิธีการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1-\tau_n)x_n + \tau_n\left((1-\gamma_n)w_n + \gamma_n J_{r_n}^{\partial g}(w_n - r_n\nabla f(w_n))\right), \\ x_{n+1} = (1-\delta_n)x_n + \delta_n\left((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n J_{r_n}^{\partial g}(z_n - r_n\nabla f(z_n))\right), \end{cases} \tag{4.6}$$

โดยที่ลำดับ $\{\tau_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\lambda_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

(i) $0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq 1$

(ii) $0 < \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\alpha} := \epsilon, \alpha > 0$

(iii) $0 < \gamma \leq \gamma_n \leq \rho < 1$

(iv) $0 < \delta \leq \delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\beta} := \varepsilon, \beta > 0$

(v) $0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \iota < 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4.6) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุด $w \in \Omega$

ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ คอนเวกซ์และหาอนุพันธ์ได้ โดยที่ ∇f เป็นการส่งแบบ $1/L-$ลิพชีทเชียนต่อเนื่อง และ $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นการส่งแบบคอนเวกซ์และกึ่งต่อเนื่องล่าง โดยที่เซตผลเฉลยแทนด้วย $\Omega := (\nabla f + \partial g)^{-1}(0)$ สำหรับ $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ ได้นิยามวิธีการทำซ้ำดังนี้

เลือก $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$ และใช้วิธีการทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1-\tau_n)x_n + \tau_n\left((1-\gamma_n)w_n + \gamma_n \operatorname{prox}_{r_n g}(w_n - r_n\nabla f(w_n))\right), \\ x_{n+1} = (1-\delta_n)x_n + \delta_n\left((1-\lambda_n)z_n + \lambda_n \operatorname{prox}_{r_n g}(z_n - r_n\nabla f(z_n))\right), \end{cases} \tag{4.7}$$

โดยที่ลำดับ $\{\tau_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\}, \{\lambda_n\}$ และ $\{\theta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

(i) $0 \leq \theta_n \leq \theta_{n+1} \leq 1$

(ii) $0 < \tau \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\alpha} := \epsilon, \alpha > 0$

(iii) $0 < \gamma \leq \gamma_n \leq \rho < 1$

(iv) $0 < \delta \leq \delta_n \leq \delta_{n+1} \leq \dfrac{1}{2+\beta} := \varepsilon, \beta > 0$

(v) $0 < \lambda \leq \lambda_n \leq \iota < 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4.7) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุด $w \in \arg\min(f+g)$

จากการศึกษาวิธีการทำซ้ำใหม่ ในการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมต่ำสุด ปัญหาการหาผลเฉลยร่วมของสองตัวดำเนินการ ปัญหาอสมการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพ ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่มีความสำคัญ 6 ทฤษฎี และจากตารางที่ 3.1 และ ตารางที่ 3.2 พบว่าภาพตัวอย่างแต่ละภาพที่ใช้วิธีการทำซ้ำใหม่ ในการวิเคราะห์จะได้ว่ามีจำนวนครั้งในการทำซ้ำ เวลา มีค่าน้อยกว่าวิธีการทำซ้ำ NAGA แสดงว่าวิธีการทำซ้ำใหม่ มีประสิทธิภาพที่ดีกว่าและหากพิจารณา ค่า ISNR แล้วพบว่า ISNR มีค่ามาก จะทำให้ภาพมัวแตกต่างกันกับภาพต้นแบบน้อย นั่นหมายความว่า ภาพที่ได้จากการวิเคราะห์มีความชัดเจนมากขึ้นเช่นกัน จากตารางทั้งสองพบวิธีการทำซ้ำใหม่ให้ค่า ISNR มากกว่าวิธีการทำซ้ำ NAGA ทุกตัวอย่างภาพ นั่นแสดงว่าวิธีการทำซ้ำใหม่มีประสิทธิภาพที่ดีกว่า และสุดท้ายในส่วนของค่าความคลาดเคลื่อน พบว่าโดยเฉลี่ยแล้วไม่มีความแตกต่างกัน