บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

ให้ $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริงด้วยผลคูณภายใน $\langle \cdot, \cdot \rangle$ และประกอบด้วยนอร์ม ให้ $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ และ $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ เป็นการส่งแบบค่าเดียวและหลายค่าตามลำดับ จากข้อมูลนี้ต้องการศึกษาปัญหาร่วมกันต่อไปนี้

$$\text{หา } z^* \in \mathcal{H} \text{ ซึ่ง } 0 \in (\mathcal{K} + \mathcal{B})z^* \tag{1.1}$$

ปัญหา (1.1) นี้ได้ดึงดูดความสนใจเป็นอย่างมากเนื่องจากเป็นหัวใจหลักของปัญหาทางคณิตศาสตร์หลากหลาย เช่น ปัญหาความเป็นไปได้แยก ให้ $\mathcal{H}_1$ และ $\mathcal{H}_2$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง $\mathcal{S} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ เป็นการดำเนินการเชิงเส้นและมีขอบเขต $\mathcal{S}^*$ เป็นผูกผันของ $\mathcal{S}$ ให้ $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_1$ และ $\mathcal{Q} \subset \mathcal{H}_2$ เป็นเซตไม่ว่างปิด และคอนเวกซ์ ปัญหาความเป็นไปได้แยกแบบคอนเวกซ์ (Censor & Elfving, 1994 : 221-239) มีรูปแบบดังนี้

$$\text{หา } z^* \in \mathcal{C} \text{ ซึ่ง } \mathcal{S}z^* \in \mathcal{Q} \tag{1.2}$$

ให้ $\mathcal{K}z^* = \nabla(\frac{1}{2}\|\mathcal{S}z^* - \mathcal{P}_{\mathcal{Q}}\mathcal{S}z^*\|^2) = \mathcal{S}^*(\mathcal{I} - \mathcal{P}_{\mathcal{Q}})\mathcal{S}z^*$ ซึ่ง $\mathcal{P}_{\mathcal{Q}}$ เป็นเมตริกซ์การฉายทั่วถึง $\mathcal{Q}$ และมี ∇ เป็นเกรเดียนต์ $\mathcal{B} = \partial i_{\mathcal{C}}$ เป็นฟังก์ชันตัวบ่งชี้ ดังนั้นปัญหาความเป็นไปได้แบบแยก คอนเวกซ์และมีโครงสร้างแบบ (1.1) อีกทั้งยังสามารถให้ $\mathcal{K}$ เป็นลิพชิทซ์แบบต่อเนื่องซึ่งมีค่าคงที่ $\mathcal{L} = \|\mathcal{S}\|^2$ และ $\mathcal{B}$ เป็นตัวดำเนินการมากสุดทางเดียว (Bauschke & Combettes, 2011 : 293-303) พิจารณาปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบคอนเวกซ์ ให้ g และ h เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์และกึ่งต่อเนื่องล่าง ส่งจาก $\mathcal{H}$ ไปยัง $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ซึ่ง g หาอนุพันธ์ได้และ h คำนวณได้โดยการส่งแบบประมาณค่า ให้ $\mathcal{K} = \nabla g$ และ $\mathcal{B} = \partial h$ จะเห็นว่าปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบคอนเวกซ์นี้ก็เป็นปัญหาการร่วมกันเช่นเดียวกันกับ (1.1) (Rockafellar, 1970 : 209-216)

ปัญหาค่าต่ำสุดแบบคอนเวกซ์ ให้ $\mathcal{S} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ $\mathcal{T} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ กึ่งต่อเนื่องล่าง และไม่เรียบ พิจารณาปัญหาค่าต่ำสุดแบบคอนเวกซ์ได้ดังนี้

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \mathcal{S}(x) + \mathcal{T}(x) \tag{1.3}$$

โดยกฎแฟร์มาต์ ทำให้ปัญหาข้างบนสมมูลกับปัญหาของการหา $x \in \mathcal{H}$ ซึ่ง

$$0 \in \nabla\mathcal{S}(x) + \partial\mathcal{T}(x) \tag{1.4}$$

เมื่อ $\nabla\mathcal{S}$ เป็นแกรเดียนต์ของ $\mathcal{S}$ และ $\partial\mathcal{T}$ เป็นเชิงอนุพันธ์ย่อยของ $\mathcal{T}$ ถูกกำหนดโดย

$$\partial\mathcal{T}(x) = \{z \in \mathcal{H} : \mathcal{T}(x) \leq \langle z, x - y \rangle + \mathcal{T}(y)\}$$

สำหรับทุก $y \in \mathcal{H}$

ปัญหาการประมวลผลสัญญาณที่ถูกบีบอัดสามารถแสดงในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

$$\tau = \mathcal{S}z^* + \eta \tag{1.5}$$

เมื่อ $z^* \in \mathbb{R}^N$ เป็นสัญญาณดั้งเดิม $\tau \in \mathbb{R}^M$ เป็นสัญญาณที่เสีย $\mathcal{S} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{M\times N}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตและ $\eta \in \mathbb{R}^M$ คือสัญญาณรบกวน สำหรับ $M, N \in \mathbb{N}$ สมการเชิงเส้น (1.5) เป็นปัญหาการหาค่าต่ำสุดแบบคอนเวกซ์ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์กับปัญหากำลังสองน้อยที่สุดมีรูปแบบดังนี้

$$\min_{z^*\in\mathcal{H}} \frac{1}{2}\|\mathcal{S}z^* - \tau\|_2^2 + \rho\|z^*\|_1 \tag{1.6}$$

เมื่อ $\mathcal{S} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ เป็นการดำเนินการเชิงเส้นและมีขอบเขต τ เป็นเวกเตอร์ และ $\rho > 0$ เป็นปัญหากำลังสองน้อยที่สุดที่มี l_1 ถูกนำเสนอและได้รับความนิยมภายใต้ชื่อ การดำเนินการเลือกและการหดตัวที่น้อยที่สุด (LASSO) โดย Tibshirami (Tibshirami, 1996 : 267-288) และการลดสัญญาณรบกวนพื้นฐานโดย Chen, Donoho & Saunders (Chen, Donoho & Saunders, 1998 : 33-61) นักวิจัยจำนวนมากได้พัฒนาวิธีการแก้ปัญหา (1.1)

งานวิจัยนี้จะนำเสนอการดำเนินการแบบของทีเซง จำนวน 4 แบบด้วยขนาดขั้นตอนที่ปรับเปลี่ยนได้ทางเดียวแบบใหม่สำหรับการแก้ปัญหา (1.1) และ (1.3) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งขนาดขั้นตอนที่ปรับเปลี่ยนได้ทางเดียวแบบใหม่นี้ไม่ต้องหาค่าคงที่ลิพชิทซ์ และไม่จำเป็นต้องมีขั้นตอนการค้นหาตามเส้น

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อสร้างวิธีการเชิงตัวเลขที่ได้รับการพัฒนาใหม่โดยใช้เทคนิคหนืดและการดำเนินการที่ดีที่สุดสำหรับการแก้ปัญหาการร่วมกัน
2. เพื่อสร้างทฤษฎีใหม่ของการลู่เข้าภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหาการร่วมกัน
3. แสดงพฤติกรรมการลู่เข้าเพื่อแสดงถึงประสิทธิภาพและการดำเนินการตามวิธีการที่ได้นำเสนอกับตัวแบบสัญญาณเพื่อแก้ปัญหาการประมวลผลสัญญาณให้ดีขึ้น

ประโยชน์ของการวิจัย

1. ได้วิธีการเชิงตัวเลขที่ดีที่สุดสำหรับการแก้ปัญหาการร่วมกัน
2. ได้ทฤษฎีของการลู่เข้าภายได้เงื่อนไขที่เหมาะสม
3. ได้การดำเนินการที่ใช้แก้ไขปัญหาการประมวลผลสัญญาณให้ดีขึ้น
4. ได้ยกระดับคุณภาพการศึกษาและเผยแพร่ผลงานในระดับชาติหรือนานาชาติ

ขอบเขตของการวิจัย

1. พัฒนาการดำเนินการแบบทีเซงโดยใช้เทคนิคหนืดสำหรับแก้ปัญหาการร่วมกันในปริภูมิฮิลเบิร์ต
2. สร้างทฤษฎีการลู่เข้าเพื่อยืนยันการลู่เข้าสู่ผลเฉลยของการดำเนินการแบบทีเซงที่พัฒนาขึ้นมาใหม่
3. นำไปประยุกต์ใช้ปัญหาการประมวลผลสัญญาณให้ดีขึ้น

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. $Fix(\mathcal{K}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \mathcal{K}x = x\}$ แทนเซตจุดตรึงของการส่ง $\mathcal{K}$
2. $\mathcal{H}$ แทนปริภูมิฮิลเบิร์ต หมายถึง ปริภูมิผลคูณภายในบริบูรณ์ซึ่งประกอบด้วยนอร์มที่ถูกนิยามโดยผลคูณภายใน คือ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ สำหรับ $x \in \mathcal{H}$ เมื่อ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ คือ สัญลักษณ์ของผลคูณภายในและมีสมบัติดังนี้

   2.1 $\langle x, x \rangle \geq 0$

   2.2 $\langle x, x \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

   2.3 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

   2.4 $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ สำหรับ $x, y, z \in \mathcal{H}$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ แทนการฉายเมตริกของ $\mathcal{H}$ ทั่วถึง $\mathcal{C}$ หมายถึง สำหรับทุก $x \in \mathcal{H}$ และ $\mathcal{C}$ เป็นเซตไม่ว่าง ปิด และคอนเวกซ์ มี $y \in \mathcal{C}$ ซึ่ง

$$\|x - y\| = d(x, \mathcal{C}) = \inf\{\|x - w\| : w \in \mathcal{C}\}$$

4. $\partial i_{\mathcal{C}}(x)$ แทนนฟังก์ชันบ่งชี้บน $\mathcal{C}$ หมายถึง เซต $\mathcal{C}$ เป็นเซตไม่ว่าง ปิด และคอนเวกซ์ ซึ่ง $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ ถูกนิยามโดย

$$\partial i_{\mathcal{C}}(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{C} \\ \infty, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$