บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนิยามและทฤษฎีบท

ในงานวิจัยทางคณิตศาสตร์ มีการดำเนินการ บทนิยาม และทฤษฎีบทที่เป็นที่รู้จักกันดังนี้

บทนิยาม 2.1 (Bauschke & Combettes, 2011 : 59-70) $\mathcal{K}:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการดำเนินการ แล้ว

1. การดำเนินการ $\mathcal{K}$ จะถูกเรียกว่า $\mathcal{L}$-ลิพชิทซ์แบบต่อเนื่องด้วย $\mathcal{L} > 0$ ถ้า

$$\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\| \leq \mathcal{L}\|x - y\|, \quad \forall\, x,\, y \in \mathcal{H}$$

2. ถ้า $\mathcal{L} = 1$ แล้ว $\mathcal{S}$ จะถูกเรียกว่า การส่งแบบไม่ขยาย การดำเนินการ $\mathcal{K}$ จะถูกเรียกว่า ทางเดียว ถ้า

$$\langle \mathcal{K}x - \mathcal{K}y, x - y\rangle \geq 0, \quad \forall\, x,\, y \in \mathcal{H}$$

การดำเนินการ $\mathcal{K}$ จะถูกเรียกว่า การส่งแบบไม่ขยายหนักแน่น ถ้า

$$\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\|^2 \leq \langle \mathcal{K}x - \mathcal{K}y, x - y\rangle, \quad \forall x,\, y \in \mathcal{H}$$

หรือสมมูลกับ

$$\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(\mathcal{I} - \mathcal{K})x - (\mathcal{I} - \mathcal{K})y\|^2, \quad \forall\, x,\, y \in \mathcal{H}$$

เซตจุดตรึงของ $\mathcal{K}$ ถูกกำหนดเป็น $Fix(\mathcal{K}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \mathcal{K}x = x\}$ ฟังก์ชัน $g:\ \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ ถูกเรียกว่า ฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง ถ้า

$$\liminf_{k\to\infty} g(x_k) \geq g(x)$$

เงื่อนไขที่จำเป็นในการศึกษาเซต คือ เซต $\mathcal{C}$ เป็นเซตไม่ว่าง ปิด และคอนเวกซ์ ซึ่ง $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ เป็นฟังก์ชันบ่งชี้บน $\mathcal{C}$ ถูกนิยามดังนี้

$$\partial i_{\mathcal{C}}(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{C} \\ \infty, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันบ่งชี้ที่บอกว่า ถ้าสมาชิก $x \in \mathcal{C}$ จะมีค่าเป็น 0 และกรณีอื่นจะมีค่าเป็น ∞ กรณีที่ศึกษามีจุดที่สนใจศึกษาอยู่นอกเซต $\mathcal{C}$ จึงจำเป็นต้องฉายจุดนั้นลงมาบน $\mathcal{C}$ โดยใช้ $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ เป็นการฉายเมตริกของ $\mathcal{H}$ ทั่วถึง $\mathcal{C}$ ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่า $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายหนักแน่น (Cegielski, 2012 : 203-274)

ให้ $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ เป็นการส่งหลายค่าและ $J_{\eta}^{\mathcal{B}} = (\mathcal{I} + \eta\mathcal{B})^{-1}$ เป็นตัวแก้ปัญหาของการส่ง $\mathcal{B}$ สำหรับทุก $\eta > 0$ ซึ่งทราบกันดีว่า $J_{\eta}^{\mathcal{B}}$ เป็นการส่งค่าเดียว ซึ่งมี $\mathcal{D}(J_{\eta}^{\mathcal{B}}) = \mathcal{H}$ เมื่อ $\mathcal{D}(J_{\eta}^{\mathcal{B}})$ เป็นโดเมนของการดำเนินการ $J_{\eta}^{\mathcal{B}}$ และ $J_{\eta}^{\mathcal{B}}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายหนักแน่น สำหรับทุก $\eta > 0$

นอกจากการศึกษาการส่งค่าเดียวแล้วยังมีการส่งหลายค่า $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ ถูกเรียกว่า ทางเดียว ถ้าให้สำหรับทุก $x, y \in \mathcal{H}, u \in \mathcal{B}x$ และ $v \in \mathcal{B}y$ ทำให้ได้ $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$ การส่งหลายค่า $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ ถูกเรียกว่า ทางเดียวมากที่สุด ถ้าทุก $(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \langle u - v, x - y\rangle \geq 0$ สำหรับทุก $(y, v) \in \mathcal{G}(\mathcal{B})$ (กราฟของการส่ง $\mathcal{B}$) ทำให้ได้ $u \in \mathcal{B}x$

บทตั้งที่สำคัญในการศึกษาการส่งหลายค่ามีดังนี้

บทตั้ง 2.1 (Bauschke & Combettes, 2011 : 59-70) ให้ $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่ง แล้วจะสมมูลกับข้อต่อไปนี้

1. $\mathcal{K}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายหนักแน่น
2. $(\mathcal{I} - \mathcal{K})$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายหนักแน่น
3. $\|\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\|^2 \leq \langle x - y\mathcal{K}x - \mathcal{K}y\rangle, \quad \forall\, x, y \in \mathcal{K}$

บทตั้ง 2.2 (Kamimura & Takahashi, 2000 : 226-240) ให้ $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ เป็นการส่งทางเดียวมากที่สุด และ $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่งบน v กำหนด $\mathcal{S}_{\rho} : (\mathcal{I} + \rho\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{I} - \rho\mathcal{K}),\ \rho > 0$ แล้ว

$$Fix(\mathcal{S}_{\rho}) = (\mathcal{K} + \mathcal{B})^{-1}(0),\ \forall\, \rho > 0$$

บทตั้ง 2.3 (Brézis & Chapitre, 1973 : 19-51) ให้ $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ เป็นการส่งทางเดียวมากที่สุด และ $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่งทางเดียวและลิพชิทซ์แบบต่อเนื่อง แล้ว $\mathcal{K} + \mathcal{B}$ เป็นการส่งทางเดียวมากที่สุด

บทตั้งที่สำคัญในการพิสูจน์การลู่เข้าของการดำเนินการมีดังนี้

บทตั้ง 2.4 (Xu, 2002 : 240-256) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงไม่ลบและมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$a_{n+1} = (1 - \alpha_n)a_n + \alpha_n b_n + c_n, \quad \forall\, n \geq n_0$$

เมื่อ $\{a_n\} \subset (0,1)$ และ $\{b_n\}, \{c_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \ \limsup_{n\to\infty} b_n \leq 0$

2. $c_n \geq 0, \forall n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$

แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

บทตั้ง 2.5 (Maingé, 2008 : 1499-1515) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงไม่ลบซึ่งมีลำดับย่อย $\{a_{n_j}\}$ ของ $\{a_n\}$ ซึ่ง $a_{n_j} < a_{n_{j+1}}$ สำหรับ $j \in \mathbb{N}$ แล้วมีลำดับไม่ลด $\{m_k\}$ ของ $\mathbb{N}$ ซึ่ง $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$ และมีสมบัติที่สอดคล้องโดยที่ $k \in \mathbb{N}$ ดังนี้

$$a_{m_k} \leq a_{m_k+1} \text{ และ } a_k \leq a_{m_k+1}$$

บทตั้ง 2.6 (Tan & Xu, 1993, : 301-308) ให้ $\{\eta_n\}$ และ $\{\varphi_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง

$$\eta_{n+1} \leq \eta_n + \varphi_n, \quad \forall n \geq 1$$

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$ แล้วมี $\lim_{n\to\infty} \eta_n$ เกิดขึ้น

บทตั้ง 2.7 (Saejung & Yotkaew, 2012 : 742-750) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริงบวกใน $(0, 1)$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริงบวก สมมติให้

$$a_{n+1} \leq (1-\alpha_n)a_n + \alpha_n b_n, \quad \forall n \geq 1$$

ถ้า $\limsup_{k\to\infty} b_{n_k} \leq 0$ สำหรับทุกเซตย่อย $\{a_{n_k}\}$ ของ $\{a_n\}$ สอดคล้องกับ

$$\liminf_{k\to\infty}(a_{n_k+1} - a_{n_k}) \geq 0$$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

บทตั้ง 2.8 (Oyewole, Abass & Mewomo, 2020 : 389-408) ให้ $\alpha \in (0,1)$ สำหรับ $x, y \in \mathcal{H}$ จะมีสมบัติต่อไปนี้:

1. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$
2. $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle$
3. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
4. $\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$

ทฤษฎีบท 2.9 (Browder, 1967 : 82-90) ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตไม่เป็นเซตว่าง ปิด และคอนเวกซ์ของปริภูมิฮิลเบิร์ต $\mathcal{H}$ และ $\mathcal{K}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายบน $\mathcal{C}$ แล้วจะได้ว่าลำดับ $\{x_t\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $z \in Fix(\mathcal{K})$ เมื่อ $t \to 0$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการแก้ปัญหา (1.1) วิธีหนึ่งที่เป็นที่นิยมคือวิธีการแยกไปข้างหน้า - ถอยหลัง (FBM) ที่รู้จักกันดีซึ่งนำเสนอโดย Passty (Passty, 1979 : 383-390) และ Lions & Mercier (Lions & Mercier, 1979 : 964-979) มีการกำหนดวิธีการ ดังต่อไปนี้ เลือกจุดเริ่มต้นโดย $x_0 \in \mathcal{H}$ ให้การวนซ้ำปัจจุบัน x_n สร้างการวนซ้ำถัดไปดังนี้

$$x_{n+1} = (\mathcal{I} + \rho_n\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{I} - \rho_n\mathcal{K})(x_n) \tag{2.1}$$

เมื่อ $\mathcal{I} :\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่งเอกลักษณ์ $(\cdot)^{-1}$ เป็นผกผัน $\rho_n > 0,\ \mathcal{K}$ และ $\mathcal{B}$ เรียกว่าตัวดำเนินการไปข้างหน้าและตัวดำเนินการถอยหลังตามลำดับ ทีเซงได้นำเสนอการแก้ปัญหา (1.5) โดยพัฒนาวิธีการแยก (MFB) หรือที่นิยมเรียกว่า การดำเนินการแบบของทีเซง (Tseng, 2000 : 431-446) มีการกำหนดดังต่อไปนี้ เลือกจุดเริ่มต้นโดย $x_0 \in \mathcal{H}$

$$y_n = (\mathcal{I} + \rho_n\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{I} - \rho_n\mathcal{K})(x_n) \tag{2.2}$$

เมื่อ ρ_n เป็นค่าที่มากที่สุดจาก $\rho = \{\delta, \delta l, \delta l^2, \dots\}$ ที่สอดคล้องกับ $\rho\|\mathcal{K}y_n - \mathcal{K}x_n\| \le \mu\|y_n - x_n\|$ ซึ่ง $\delta > 0,\ l \in (0,1)$ และ $\mu \in (0,1)$ เป็นค่าคงที่ ให้การวนซ้ำปัจจุบัน x_n สร้างการวนซ้ำถัดไปดังนี้

$$x_{n+1} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(y_n - \rho_n(\mathcal{K}y_n - \mathcal{K}x_n)) \tag{2.3}$$

เนื่องจากการดำเนินการแบบของทีเซงใน (2.2) และ (2.3) มีการลู่เข้าอย่างอ่อนในปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง จึงต้องการศึกษาวิธีการนี้และพัฒนาการลู่เข้าซึ่งเครื่องมือที่จะนำมาใช้พัฒนาเพื่อเร่งการลู่เข้าของวิธีการเชิงตัวเลขคือเทคนิคหนืด นั่นคือพจน์ $x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})$ ซึ่งนำเสนอโดย Polyak (Polyak, 1964 : 1-17) ดังนี้ สำหรับ $x_0,\ x_1 \in \mathcal{H}$ แล้ว

$$z_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \tag{2.4}$$

$$x_{n+1} = z_n - \eta_n\nabla\mathcal{S}(x_n) \tag{2.5}$$

เมื่อ $\theta_n \in (0,1)$ มี η_n เป็นพารามิเตอร์ของขนาดขั้นตอนครั้งถัดไปที่ต้องเลือกให้เล็กพอสมควรและ $\mathcal{S}$ เป็นฟังก์ชันเรียบและคอนเวกซ์