บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในโครงงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการพัฒนาการดำเนินการแบบของทีเซงบนปริภูมิฮิลเบิร์ต $\mathcal{H}$ ที่เป็นปริภูมิผลคูณภายในบริบูรณ์ซึ่งประกอบด้วยนอร์มที่นิยามโดยผลคูณภาย นั่นคือ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ สำหรับ $x \in \mathcal{H}$ เมื่อ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ คือสัญลักษณ์ของผลคูณภายและมีสมบัติดังนี้

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$
2. $\langle x, x\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle$ สำหรับ $x, y, z \in \mathcal{H}$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\| \cdot \|$ คือสัญลักษณ์ของนอร์มและมีสมบัติดังนี้

1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
2. $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y\rangle$
3. $\|x + y\|^2 \geq \|x\|^2 + 2\langle y, x\rangle$
4. $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$
5. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x - y, y\rangle$

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และเอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยทฤษฎีบทการพัฒนาการดำเนินการแบบของทีเซงและการประมวลผลสัญญาณจากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ

2. ศึกษาเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานที่มีอยู่ในเอกสารและงานวิจัยที่ค้นคว้า พร้อมทั้งศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีบทการพัฒนาการดำเนินการแบบของทีเซงและการประมวลผลสัญญาณใน ข้อ 1

3. อาศัยองค์ความรู้ที่สำคัญต่าง ๆ ที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1 และ 2 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญ

4. พัฒนาการดำเนินการแบบของทีเซงและการประมวลผลสัญญาณ

5. ดำเนินการตรวจสอบวิธีการจากข้อ 4 ด้วยการพิสูจน์

การวิเคราะห์ข้อมูล

จากการวิเคราะห์ข้อมูลสามารถสร้างการดำเนินการแบบของทีเซงได้ 4 แบบดังนี้

การดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 1

ให้ $x_0,\ x_1 \in \mathcal{H},\ \varepsilon_n \in (0,1),\ \mu \in (0,1),\ \alpha > 0,\ \eta_1 > 0$ และ เลือก $\{\varphi_n\}$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$ และ $\{\psi_n\} \subset (0,1)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \infty$$

ขั้นที่ 1 คำนวณ

$$z_n = (1-\psi_n)(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}))$$

เมื่อ $\{\theta_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $0 \leq \theta_n \leq \hat{\theta}_n$ และ

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{n-1}{n+\alpha-1},\ \frac{\varepsilon_n}{\|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & \text{ถ้า } x_n \neq x_{n-1} \\ \dfrac{n-1}{n+\alpha-1}, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ขั้นที่ 2 คำนวณ

$$s_n = J_{\eta_n}^{\mathcal{B}}(\mathcal{I} - \eta_n \mathcal{K}) z_n.$$

ถ้า $s_n = z_n$ ให้หยุด แล้ว s_n เป็นผลเฉลยของปัญหา (1.1) ถ้าไม่ใช่ให้ดำเนินการต่อ**ขั้นที่ 3**
ขั้นที่ 3 คำนวณ

$$x_{n+1} = s_n - \eta_n(\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n)$$

เมื่อ

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\mu\|s_n - z_n\|}{\|\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n\|},\ \eta_n + \varphi_n \right\}, & \text{ถ้า } \mathcal{K}s_n \neq \mathcal{K}z_n \\ \eta_n + \varphi_n, & \text{อื่น ๆ} \end{cases} \tag{3.1}$$

ทำซ้ำโดยให้ $n := n+1$ และกลับไป**ขั้นที่ 1**

โดยใช้เงื่อนไขที่เพียงพอและเหมาะสมดังนี้

เงื่อนไข 1 เซตที่เป็นไปได้ของปัญหา (1.1) ไม่เป็นเซตว่าง ปิด และคอนเวกซ์เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{H}$

เงื่อนไข 2 เซตผลเฉลยของปัญหา (1.1) ไม่เป็นเซตว่าง นั่นคือ $\Omega := (\mathcal{K} + \mathcal{B})^{-1}(0) \neq \emptyset$

เงื่อนไข 3 การส่ง $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็น $\mathcal{L}$-ลิพชิทซ์ต่อเนื่อง และทางเดียว ซึ่ง $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ เป็นการดำเนินการทางเดียวมากที่สุด

การดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 2

ให้ $x_0,\ x_1, \in \mathcal{H},\ \varepsilon_n \in (0{,}1),\ \mu \in (0{,}1),\ \alpha > 0,\ \eta_1 > 0$ และเลือก $\{\varphi_n\}$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$ และเลือก $\{\psi_n\} \subset (0,\ 1)$ สอดคล้องกับ

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \infty$$

ขั้นที่ 1 คำนวณ

$$z_n = (1-\psi_n)(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})) \tag{3.2}$$

เมื่อ $\{\theta_n\}$ เป็นลำดับ ซึ่ง $0 \le \theta_n \le \hat{\theta}_n$ และ

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{n-1}{n+\alpha-1},\ \frac{\varepsilon_n}{\|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & \text{ถ้า } x_n \neq x_{n-1} \\ \dfrac{n-1}{n+\alpha-1}, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ขั้นที่ 2 คำนวณ

$$s_n = J_{\eta_n}^{\mathcal{B}}(\mathcal{I} - \eta_n \mathcal{K}) z_n \tag{3.3}$$

ถ้า $s_n = z_n$ ให้หยุด แล้ว s_n เป็นผลเฉลยของปัญหา (1.1) ถ้าไม่ใช่ให้ดำเนินการต่อ**ขั้นที่ 3**
ขั้นที่ 3 คำนวณ

$$x_{n+1} = \psi_n f(x) + (1-\psi_n)(s_n - \eta_n(\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n)) \tag{3.4}$$

เมื่อ

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\mu\|s_n - z_n\|}{\|\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n\|},\ \eta_n + \varphi_n \right\}, & \text{ถ้า } \mathcal{K}s_n \neq \mathcal{K}z_n \\ \eta_n + \varphi_n, & \text{อื่น ๆ} \end{cases} \tag{3.5}$$

ทำซ้ำโดยให้ $n := n+1$ และกลับไป**ขั้นที่ 1**

เงื่อนไข 4 ให้ $\{\theta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงใน (0,1) ซึ่ง

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \theta_n = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = \infty$$

การส่ง $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่งแบบหดตัว ถ้า

$$\|f(x) - f(y)\| \le \rho\|x-y\|, \quad \forall\, x,\ y \in \mathcal{H} \ \text{ และ } \ \rho \in [0{,}1)$$

เงื่อนไข 5

ฟังก์ชัน $\mathcal{S} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์และหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งเกรเดียนต์ $\nabla\mathcal{S}$ เป็น $\mathcal{L}$-ความต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์และ $\mathcal{T} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ เป็นคอนเวกซ์ และกึ่งต่อเนื่องล่าง ซึ่ง $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ บรรจุค่าต่ำสุด

การดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 3

ให้ $x_0, x_1 \in \mathcal{H}, \varepsilon_n \in (0,1), \mu \in (0,1), \alpha > 0, \eta_1 > 0$ และ เลือก $\{\varphi_n\}$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$ เลือก $\{\psi_n\} \subset (0, 1)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \infty$$

ขั้นที่ 1 คำนวณ

$$z_n = (1 - \psi_n)(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}))$$

เมื่อ $\{\theta_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $0 \leq \theta_n \leq \hat{\theta}_n$ และ

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{n-1}{n+\alpha-1}, \frac{\varepsilon_n}{\|x_n - x_{n-1}\|}\right\}, & \text{ถ้า } x_n \neq x_{n-1} \\ \dfrac{n-1}{n+\alpha-1}, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ขั้นที่ 2 คำนวณ

$$s_n = J_{\eta_n}^{\partial\mathcal{T}}(\mathcal{I} - \eta_n \nabla\mathcal{S})z_n$$

ถ้า $s_n = z_n$ ให้หยุด แล้ว s_n เป็นผลเฉลยของปัญหา (1.3) ถ้าไม่ใช่ให้ดำเนินการต่อ**ขั้นที่ 3**
ขั้นที่ 3 คำนวณ

$$x_{n+1} = s_n - \eta_n(\nabla\mathcal{S}s_n - \nabla\mathcal{S}z_n)$$

เมื่อ

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\mu\|s_n - z_n\|}{\|\nabla\mathcal{S}s_n - \nabla\mathcal{S}z_n\|}, \eta_n + \varphi_n\right\}, & \text{ถ้า } \nabla\mathcal{S}s_n \neq \nabla\mathcal{S}z_n \\ \eta_n + \varphi_n, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ทำซ้ำโดยให้ $n := n + 1$ และกลับไป**ขั้นที่ 1**

การดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 4

ให้ $x_0, x_1 \in \mathcal{H}, \varepsilon_n \in (0,1), \mu \in (0,1), \alpha > 0, \eta_1 > 0$ และ $\{\varphi_n\}$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$ และ $\{\psi_n\} \subset (0, 1)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \infty$$

ขั้นที่ 1 คำนวณ

$$z_n = (1 - \psi_n)(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}))$$

เมื่อ $\{\theta_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $0 \leq \theta_n \leq \hat{\theta}_n$ และ

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{n-1}{n+\alpha-1}, \frac{\varepsilon_n}{\|x_n - x_{n-1}\|}\right\}, & \text{ถ้า } x_n \neq x_{n-1} \\ \dfrac{n-1}{n+\alpha-1}, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ขั้นที่ 2 คำนวณ

$$s_n = J_{\eta_n}^{\partial \mathcal{T}}(\mathcal{I} - \eta_n \nabla \mathcal{S}) z_n$$

ถ้า $s_n = z_n$ ให้หยุด แล้ว s_n เป็นผลเฉลยของปัญหา (1.3) ถ้าไม่ใช่ให้ดำเนินการต่อ**ขั้นที่ 3**
ขั้นที่ 3 คำนวณ

$$x_{n+1} = \psi_n f(x_n) + (1 - \psi_n)(s_n - \eta_n(\nabla \mathcal{S} s_n - \nabla \mathcal{S} z_n))$$

เมื่อ

$$\eta_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\dfrac{\mu\|s_n - z_n\|}{\|\nabla \mathcal{S} s_n - \nabla \mathcal{S} z_n\|}, \eta_n + \varphi_n\right\}, & \text{ถ้า } \nabla \mathcal{S} s_n \neq \nabla \mathcal{S} z_n \\ \eta_n + \varphi_n, & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

ทำซ้ำโดยให้ $n := n + 1$ และกลับไป**ขั้นที่ 1**