บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการวิจัย

จากการดำเนินการที่กล่าวไว้ในบทที่ 3 ในที่นี้จะขอแสดงการพิสูจน์เพื่อยืนยันกระบวนการที่ได้ดังนี้

บทตั้ง 4.1 ถ้าลำดับ $\{\eta_n\}$ ที่ก่อกำเนิดโดย (3.1) เป็นลำดับลดทางเดียว และมีขอบเขตด้านล่างโดย min $\left\{\frac{\mu}{\mathcal{L}},\, \eta_1\right\}$

พิสูจน์ เห็นชัดได้ว่าลำดับ $\{\eta_n\}$ เป็นลำดับลดทางเดียว เนื่องจาก $\mathcal{K}$ เป็นฟังก์ชันลิพชิทซ์ด้วยค่าคงที่ $\mathcal{L}$ สำหรับ $\mathcal{K}s_n \neq \mathcal{K}z_n$ จะได้ว่า

$$\frac{\mu\|s_n - z_n\|}{\|\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n\|} \geq \frac{\mu\|s_n - z_n\|}{\mathcal{L}\|s_n - z_n\|} = \frac{\mu}{\mathcal{L}} \tag{4.1}$$

ซึ่ง $\mathcal{K}s_n = \mathcal{K}z_n$ สอดคล้องกับ (4.1) ดังนั้น $\eta_n \geq$ min $\left\{\frac{\mu}{\mathcal{L}},\, \eta_1\right\}$

บทตั้ง 4.2 ถ้าลำดับ $\{\eta_n\}$ ที่ก่อกำเนิดโดย (3.1) และ $\lim_{n\to\infty} \eta_n = \eta \in \left[\min\left\{\frac{\mu}{\mathcal{L}},\, \eta_1\right\}, \eta_1 + \varphi\right]$ เมื่อ $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ แล้ว

$$\|\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n\| \leq \frac{\mu}{\eta_{n+1}}\|s_n - z_n\| \tag{4.2}$$

พิสูจน์ จาก (3.1) และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่าลำดับ $\{\eta_n\}$ มีขอบเขตบนเป็น $\eta_1 + \varphi$ และมีขอบเขตล่างเป็น $\min\{\frac{\mu}{\mathcal{L}}, \eta_1\}$ จากบทตั้ง 2.6 จะมี $\lim_{n\to\infty} \eta_n$ เกิดขึ้นและให้ $\eta = \lim_{n\to\infty} \eta_n$ ซึ่ง $\eta \in \left[\min\left\{\frac{\mu}{\mathcal{L}},\, \eta_1\right\}, \eta_1 + \varphi\right]$ โดยการนิยามของ $\{\eta_n\}$ จะได้

$$\begin{aligned}\eta_{n+1} &= \min\left\{\frac{\mu\|s_n - z_n\|}{\|\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n\|}, \eta_n + \varphi_n\right\} \\ &\leq \frac{\mu\|s_n - z_n\|}{\|\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n\|}\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\|\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n\| \leq \frac{\mu}{\eta_{n+1}}\|s_n - z_n\|, \quad \forall\, n \geq 1 \tag{4.3}$$

บทตั้ง 4.3 ถ้า $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไข 1-3 และลำดับ $\{x_n\}$ ก่อกำเนิดโดยการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 1 แล้ว

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|z_n - z\|^2 - \left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|z_n - s_n\|^2, \quad \forall\, z \in \Omega$$

พิสูจน์ ให้ $z \in \Omega$ และโดยนิยามของ $\{x_{n+1}\}$ ใช้บทตั้ง 2.8 จะได้

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\|^2 &= \|s_n + \eta_n(\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n) - z\|^2 \\
&\leq \|s_n - z\|^2 + \eta_n^2\|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\|^2 + 2\eta_n\langle s_n - z, \mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\rangle \\
&= \|s_n + z_n - z_n - z\|^2 + \eta_n^2\|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\|^2 + 2\eta_n\langle s_n - z, \mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\rangle \\
&\leq \|s_n - z_n\|^2 + \|z_n - z\|^2 + 2\langle s_n - z_n, z_n - z\rangle + \eta_n^2\|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\|^2 \\
&\quad + 2\eta_n\langle s_n - z, \mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\rangle \\
&= \|z_n - z\|^2 + \|s_n - z_n\|^2 + \eta_n^2\|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\|^2 + 2\langle s_n - z_n, s_n - z\rangle \\
&\quad + 2\langle s_n - z_n, z_n - s_n\rangle + 2\eta_n\langle s_n - z, \mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\rangle \\
&= \|z_n - z\|^2 + \|s_n - z_n\|^2 + \eta_n^2\|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\|^2 + 2\langle s_n - z_n, s_n - z\rangle \\
&\quad - 2\langle s_n - z_n, s_n - z_n\rangle - 2\eta_n\langle \mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n, z - s_n\rangle \\
&= \|z_n - z\|^2 + \|s_n - z_n\|^2 + \eta_n^2\|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\|^2 - 2\langle s_n - z_n, z - s_n\rangle \\
&\quad - 2\|s_n - z_n\| - 2\eta_n\langle \mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n, z - s_n\rangle \\
&= \|z_n - z\|^2 - \|s_n - z_n\|^2 - 2\langle z_n - s_n - \eta_n(\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n), s_n - z\rangle \\
&\quad + \eta_n^2\|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\|^2 \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

โดย (4.3) และ (4.4) จะได้

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|z_n - z\|^2 - \|s_n - z_n\|^2 + \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\|z_n - s_n\|^2 \\
- 2\langle z_n - s_n - \eta_n(\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n), s_n - z\rangle \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $J_{\eta_n}^{\mathcal{B}}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายหนักแน่น และ

$$s_n = J_{\eta_n}^{B}(\mathcal{I} - \eta_n\mathcal{K})z_n = (\mathcal{I} + \eta_n\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{I} - \eta_n\mathcal{K})z_n$$

โดย $\mathcal{B}$ เป็นทางเดียวมากที่สุด มี $\rho_n \in \mathcal{B}z_n$ ซึ่ง

$$(\mathcal{I} + \eta_n\mathcal{K})z_n = s_n + \eta_n\rho_n$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\rho_n = \frac{1}{\eta_n}(z_n - s_n - \eta_n\mathcal{K}z_n) \qquad (4.6)$$

มี 0 $\in (\mathcal{K}+\mathcal{B})z$ และ $\mathcal{K}s_n + \rho_n \in (\mathcal{K}+\mathcal{B})z_n$ จาก $\mathcal{K}+\mathcal{B}$ เป็นทางเดียวมากที่สุด มี

$$\langle \mathcal{K}s_n + \rho_n, s_n - z\rangle \geq 0 \tag{4.7}$$

โดย (4.6) และ (4.7) จะได้

$$\frac{1}{\eta_n}\langle z_n - s_n - \eta_n(\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n), s_n - z\rangle \geq 0$$

ทำให้ได้ว่า

$$\langle z_n - s_n - \eta_n(\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n), s_n - z\rangle \geq 0 \tag{4.8}$$

จาก (4.5) และ (4.8) จะได้

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|z_n - z\|^2 - \left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|z_n - s_n\|^2 \tag{4.9}$$

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ $\mathcal{K}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ การส่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไข 1-4 และลำดับ $\{z_n\}$ ก่อกำเนิดโดยการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 1 ถ้ามีลำดับย่อย $\{z_{n_k}\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนสู่ $z \in \mathcal{H}$ และ $\lim_{n\to\infty}\|z_n - s_n\| = 0$ แล้ว $z \in \Omega$

พิสูจน์ จาก $\lim_{n\to\infty}\eta_n$ มีเกิดขึ้น และ $\mu \in (0,1)$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right) = 1 - \mu^2 > 0$$

จากข้างต้นจะได้ว่ามีค่าคงที่ $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2} > 0, \quad \forall\, n \geq n_0 \tag{4.10}$$

จาก (4.9) และ (4.10) จะได้ว่า

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|z_n - z\|^2, \quad \forall\, n \geq n_0 \tag{4.11}$$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\|z_n - z\|$ เกิดขึ้น ดังนั้น $\{\|z_n - z\|\}$ มีขอบเขต จาก (4.9) จะได้

$$\left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|z_n - s_n\|^2 \leq \|z_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 \tag{4.12}$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n - s_n\|^2 = 0 \tag{4.13}$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - s_n\| = 0 \tag{4.14}$$

ใช้ความจริงที่ว่า $\mathcal{K}$ ต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\| = 0 \tag{4.15}$$

จากการมีขอบเขตของ $\{z_n\}$ มีลำดับย่อย $\{z_{n_k}\}$ ของ $\{z_n\}$ ซึ่ง $z_{n_k} \rightharpoonup z \in \mathcal{H}$ จาก (4.14) จะได้ว่า $s_{n_k} \rightharpoonup z$ ให้ $(w,v) \in \mathcal{G}(\mathcal{K}+\mathcal{B})$ จะได้ว่า $v - \mathcal{K}w \in \mathcal{B}w$
เนื่องจาก $s_{n_k} = J^{\mathcal{B}}_{\eta_{n_k}}(\mathcal{I} - \eta_{n_k}\mathcal{K})z_{n_k} = (\mathcal{I} + \eta_{n_k}\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{I} - \eta_{n_k}\mathcal{K})z_{n_k}$ จะได้ว่า

$$(\mathcal{I} - \eta_{n_k}\mathcal{K})z_{n_k} \in (\mathcal{I} + \eta_{n_k}\mathcal{B})s_{n_k}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{\eta_{n_k}}(z_{n_k} - s_{n_k} - \eta_{n_k}\mathcal{K}z_{n_k}) \in \mathcal{B}s_{n_k}$$

ใช้ความเป็นทางเดียวมากที่สุดของ $\mathcal{B}$ จะได้ว่า

$$\langle w - z_{n_k}, v - \mathcal{K}w - \frac{1}{\eta_{n_k}}(z_{n_k} - s_{n_k} - \eta_{n_k}\mathcal{K}z_{n_k})\rangle \geq 0$$

และใช้ความเป็นทางเดียวของ $\mathcal{K}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\langle w - s_{n_k}, v\rangle &\geq \langle w - s_{n_k}, \mathcal{K}w + \frac{1}{\eta_{n_k}}(z_{n_k} - s_{n_k} - \eta_{n_k}\mathcal{K}z_{n_k})\rangle \\
&= \langle w - s_{n_k}, \mathcal{K}w - \mathcal{K}z_{n_k}\rangle + \frac{1}{\eta_{n_k}}\langle w - s_{n_k}, z_{n_k} - s_{n_k}\rangle \\
&= \langle w - s_{n_k}, \mathcal{K}w - \mathcal{K}s_{n_k}\rangle + \langle w - s_{n_k}, \mathcal{K}s_{n_k} - \mathcal{K}z_{n_k}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\eta_{n_k}}\langle w - s_{n_k}, z_{n_k} - s_{n_k}\rangle \\
&\geq \langle w - s_{n_k}, \mathcal{K}s_{n_k} - \mathcal{K}z_n\rangle + \frac{1}{\eta_{n_k}}\langle w - s_{n_k}, z_{n_k} - s_{n_k}\rangle
\end{aligned}$$

ในความจริง $\mathcal{K}$ เป็นต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์และ $\lim_{n\to\infty} \|z_n - s_n\| = 0$ ทำให้ได้

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{K}z_n - \mathcal{K}s_n\| = 0$$

จาก $\lim_{n\to\infty}\eta_n$ เกิดขึ้น จะได้ว่า

$$\langle w - z, v\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle w - s_{n_k}, v\rangle \geq 0$$

ในทำนองเดียวกันที่ความทางเดียวมากที่สุดของ $\mathcal{K}+\mathcal{B}$ ทำให้ได้ว่า $0 \in (\mathcal{K}+\mathcal{B})z$ นั้นคือ $z \in \Omega$

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไข 5 และลำดับ $\{x_n\}$ ที่ก่อกำเนิดโดยการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 2 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่ z เมื่อ $z = P_\Omega \circ f(z)$

พิสูจน์ ให้ $t_n = s_n - \eta_n(\mathcal{K}s_n - \mathcal{K}z_n)$

ขั้นที่ 1 จะแสดงว่า $\{x_n\}$ มีขอบเขต โดยเริ่มต้นให้ $z \in \Omega$ ใช้การพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ของบทตั้ง 5.1 ทำให้ได้ว่า

$$\|t_n - z\|^2 \leq \|z_n - z\|^2 - \left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|z_n - s_n\|^2 \tag{4.16}$$

จาก $\lim_{n\to\infty}\eta_n$ มีเกิดขึ้น และ $\mu \in (0,1)$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right) = 1 - \mu > 0$ นี่คือ

$$\|t_n - z\| \leq \|z_n - z\| \tag{4.17}$$

จากการนิยามของ $\{z_n\}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\|z_n - z\| &= \|(1-\psi_n)(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})) - z\| \\
&= \|(1-\psi_n)(x_n - z) + (1-\psi_n)\theta_n(x_n - x_{n-1}) - \psi_n z\| \\
&\leq (1-\psi_n)\|x_n - z\| + (1-\psi_n)\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| + \psi_n\|z\|
\end{aligned}$$

ให้

$$\mathcal{M}_1 = (1-\psi_n)\frac{\theta_n}{\psi_n}\|x_n - x_{n-1}\| + \|z\|$$

จากอสมการข้างบนจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{\psi_n}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\hat{\theta}_n}{\psi_n}\|x_n - x_{n-1}\| = \lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_n}{\psi_n} = 0 \tag{4.18}$$

ซึ่ง

$$\|z_n - z\| \leq (1-\psi_n)\|x_n - z\| + \psi_n\mathcal{M}_1 \tag{4.19}$$

ดังนั้น จากการใช้ (4.17) และ (4.19) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|t_n - z\| &\le \|z_n - z\| \\
&\le (1-\psi_n)\|x_n - z\| + \psi_n \mathcal{M}_1 \\
&\le \|x_n - z\| + \psi_n \mathcal{M}_1
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

จากการนิยามของ $\{x_n\}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\| &= \|\psi_n f(x_n) + (1-\psi_n)t_n - z\| \\
&= \|\psi_n (f(x_n) - z) + (1-\psi_n)(t_n - z)\| \\
&\le \psi_n \|f(x_n) - z\| + (1-\psi_n)\|t_n - z\| \\
&\le \psi_n \|f(x_n) - f(z)\| + \psi_n \|f(z) - z\| + (1-\psi_n)\|t_n - z\| \\
&\le \psi_n \delta \|x_n - z\| + \psi_n \|f(z) - z\| + (1-\psi_n)\|t_n - z\|
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

การแทน (4.19) ลงใน (4.21) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\| &\le \psi_n \delta \|x_n - z\| + \psi_n \|f(z) - z\| + (1-\psi_n)\|x_n - z\| + (1-\psi_n)\psi_n \mathcal{M}_1 \\
&\le (1-(1-\delta)\psi_n)\|x_n - z\| + \psi_n \mathcal{M}_1 + \psi_n \|f(z) - z\| \\
&= (1-(1-\delta)\psi_n)\|x_n - z\| + (1-\delta)\psi_n \frac{\mathcal{M}_1 + \|f(z) - z\|}{1-\delta} \\
&\le \max\left\{\|x_n - z\|, \frac{\mathcal{M}_1 + \|f(z) - z\|}{1-\delta}\right\} \\
&\ \ \vdots \\
&\le \max\left\{\|x_0 - p\|, \frac{\mathcal{M}_1 + \|f(p) - p\|}{1-\delta}\right\}
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า $\{x_n\}$ มีขอบเขต

ขั้นที่ 2 จะแสดงว่า $(1-\psi_n)(1-\mu^2 \frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2})\|s_n - z_n\|^2 \le \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 + \psi_n \mathcal{M}_4$

ในความจริงมี

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\|^2 &\le \psi_n \|f(x_n) - z\|^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2 \\
&\le \psi_n (\|f(x_n) - f(z)\| + \|f(z) - z\|)^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2 \\
&\le \psi_n (\kappa \|x_n - z\| + \|f(z) - z\|)^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2 \\
&\le \psi_n (\|x_n - z\| + \|f(z) - z\|)^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2
\end{aligned}
$$

$$= \psi_n\|x_n - z\|^2 + \psi_n(2\|x_n - z\| \cdot \|f(z) - z\| + \|f(z) - z\|^2) + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2$$
$$\leq \psi_n\|x_n - z\|^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_2 \tag{4.22}$$

สำหรับ $\mathcal{M}_2 > 0$ โดยบทตั้ง 5.3 จะได้ว่า

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|z_n - z\|^2 - \left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|z_n - s_n\|^2 \tag{4.23}$$

การแทรก (4.23) ลงใน (4.22) จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 \leq\ & \psi_n\|x_n - z\|^2 + (1-\psi_n)\|z_n - z\|^2 \\ & - (1-\psi_n)\left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|s_n - z_n\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_2\end{aligned} \tag{4.24}$$

ซึ่งทำให้ (4.20) มีความหมายว่า

$$\begin{aligned}\|z_n - z\|^2 &\leq (\|x_n - z\| + \psi_n\mathcal{M}_1)^2 \\ &= \|x_n - z\|^2 + \psi_n(2\mathcal{M}_1\|x_n - z\| + \psi_n\mathcal{M}_1^2) \\ &\leq \|x_n - z\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_3\end{aligned} \tag{4.25}$$

สำหรับบาง $\mathcal{M}_3 > 0$ การจัดเรียง (4.24) และ (4.25) จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 &\leq \psi_n\|x_n - z\|^2 + (1-\psi_n)\|x_n - z\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_3 \\ &\quad - (1-\psi_n)\left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|s_n - z_n\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_2 \\ &= \|x_n - z\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_3 - (1-\psi_n)\left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|s_n - z_n\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_2\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$(1-\psi_n)\left(1 - \mu^2\frac{\eta_n^2}{\eta_{n+1}^2}\right)\|s_n - z_n\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 + \psi_n\mathcal{M}_4$$

เมื่อ $\mathcal{M}_4 := \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3$

ขั้นที่ 3 จะแสดงว่า

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - z\|^2 \leq\ & (1 - (1-\delta)\psi_n)\|x_n - z\|^2 \\ & + (1-\delta)\psi_n\left[\frac{\theta_n}{\psi_n(1-\delta)}\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \frac{\psi_n\mathcal{M}_5 + 2\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle}{1-\delta}\right]\end{aligned}$$

สำหรับ $\mathcal{M}_5 > 0$ ใช้บทตั้ง 2.7 จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\|^2 &= \|\psi_n f(x_n) + (1-\psi_n)t_n - z\|^2 \\
&= \|\psi_n(f(x_n) - f(z)) + (1-\psi_n)(t_n - z) + \psi_n(f(z) - z)\|^2 \\
&\leq \|\psi_n(f(x_n) - f(z)) + (1-\psi_n)(t_n - z)\|^2 + 2\psi_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\
&\leq \psi_n\|f(x_n) - f(z)\|^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2 + 2\psi_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\
&\leq \psi_n\delta^2\|x_n - z\|^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2 + 2\psi_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\
&\leq \psi_n\delta\|x_n - z\|^2 + (1-\psi_n)\|t_n - z\|^2 + 2\psi_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\
&\leq \psi_n\delta\|x_n - z\|^2 + (1-\psi_n)\|z_n - z\|^2 + 2\psi_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

จาก (4.19) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|z_n - z\|^2 &= \|(1-\psi_n)(x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})) - z\|^2 \\
&= \|(1-\psi_n)(x_n - z) + (1-\psi_n)\theta_n(x_n - x_{n-1}) - \psi_n z\|^2 \\
&= \|(1-\psi_n)(x_n - z) + (1-\psi_n)\theta_n(x_n - x_{n-1})\|^2 \\
&\quad - 2\psi\langle(1-\psi_n)(x_n - z) + (1-\psi_n)\theta_n(x_n - x_{n-1}), z\rangle + \psi_n^2\|z\|^2 \\
&\leq \|(1-\psi_n)(x_n - z) + (1-\psi_n)\theta_n(x_n - x_{n-1})\|^2 + \psi_n^2\|z\|^2 \\
&= (1-\psi_n)\|x_n - z\|^2 + \psi_n^2\|z\|^2 + (1-\psi_n)\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \\
&\quad - (1-\psi_n)(1-\psi_n)\theta_n\|x_{n-1} - z\|^2 \\
&\leq \|x_n - z\|^2 + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \psi_n^2\|z\|^2 \\
&= \|x_n - z\|^2 + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \psi_n^2\mathcal{M}_5
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

สำหรับบาง $\mathcal{M}_5 > 0$ จาก (4.26) และ (4.27) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - z\|^2 \\
&\leq (1 - (1-\delta)\psi_n)\|x_n - z\|^2 + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \psi_n^2\mathcal{M}_5 + 2\psi_n\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle \\
&\leq (1 - (1-\delta)\psi_n)\|x_n - z\|^2 \\
&\quad + (1-\delta)\psi_n\left[\frac{\theta_n}{\psi_n(1-\delta)}\|x_n - x_{n-1}\|^2 + \frac{\psi_n\mathcal{M}_5 + 2\langle f(z) - z, x_{n+1} - z\rangle}{1-\delta}\right]
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

ขั้นที่ 4 จะแสดงว่า $\{\|x_n - z\|^2\}$ ลู่เข้าสู่ 0 โดยบทตั้ง 2.7 ได้แสดงว่า

$$
\limsup_{k\to\infty}\langle f(z) - z, x_{n_k+1} - z\rangle \leq 0
$$

สำหรับทุก ๆ เซตย่อย $\{\|x_{n_k} - z\|\}$ ของ $\{\|x_n - z\|\}$ สอดคล้องกับ

$$\liminf_{k\to\infty}(\|x_{n_k+1} - z\| - \|x_{n_k} - z\|) \geq 0$$

สมมติให้ $\{\|x_{n_k}-z\|\}$ เป็นเซตย่อยของ $\{\|x_n-z\|\}$ ซึ่ง $\liminf_{k\to\infty}(\|x_{n_k+1}-z\|-\|x_{n_k}-z\|) \geq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned}
&\liminf_{k\to\infty}(\|x_{n_k+1} - z\|^2 - \|x_{n_k} - z\|^2) \\
&= \liminf_{k\to\infty}[(\|x_{n_k+1} - z\| - \|x_{n_k} - z\|)(\|x_{n_k+1} - z\| + \|x_{n_k} - z\|)] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

โดย**ขั้นที่ 2** จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty}(1 - \psi_{n_k})\left(1 - \mu^2\frac{\eta_{n_k}^2}{\eta_{n_k+1}^2}\right)\|s_{n_k} - z_{n_k}\|^2 \\
&\leq \limsup_{k\to\infty}[\|x_{n_k} - z\|^2 - \|x_{n_k+1} - z\|^2 + \psi_{n_k}\mathcal{M}_4] \\
&\leq \limsup_{k\to\infty}[\|x_{n_k} - z\|^2 - \|x_{n_k+1} - z\|^2] + \limsup_{k\to\infty}\theta_{n_k}\mathcal{M}_4 \\
&= -\liminf_{k\to\infty}[\|x_{n_k+1} - z\|^2 - \|x_{n_k} - z\|^2] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

นี่คือ

$$\lim_{k\to\infty}\|s_{n_k} - z_{n_k}\| = 0 \tag{4.29}$$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| \to 0 \text{ เมื่อ } n \to \infty \tag{4.30}$$

จาก (4.29) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|t_{n_k} - z_{n_k}\| &= \|s_{n_k} - \eta_{n_k}(\mathcal{K}s_{n_k} - \mathcal{K}z_{n_k}) - z_{n_k}\| \\
&\leq \|s_{n_k} - z_{n_k}\| + \eta_{n_k}\|\mathcal{K}s_{n_k} - \mathcal{K}z_{n_k}\| \\
&\leq \left(1 - \mu^2\frac{\eta_{n_k}^2}{\eta_{n_k+1}^2}\right)\|s_{n_k} - z_{n_k}\|^2 \to 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ซึ่งมี

$$\|x_{n_k+1} - t_{n_k}\| = \theta_{n_k}\|t_{n_k} - f(x_{n_k})\| \to 0 \tag{4.32}$$

และ

$$\begin{aligned}\|z_{n_k} - x_{n_k}\| &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - \psi_n[x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1})] - x_n\| \\ &\leq \theta_n\|x_n - x_{n-1}\| + \psi_n\|x_n\| + \theta_n\psi_n\|x_n - x_{n-1}\| \\ &= \psi_n\frac{\theta_n}{\psi_n}\|x_n - x_{n-1}\| + \psi_n\|x_n\| + \psi_n^2\frac{\theta_n}{\psi_n}\|x_n - x_{n-1}\| \to 0 \qquad (4.33)\end{aligned}$$

จาก (4.31), (4.32) และ (4.33) จะได้

$$\|x_{n_k+1} - x_{n_k}\| \leq \|x_{n_k+1} - t_{n_k}\| + \|t_{n_k} - z_{n_k}\| + \|z_{n_k} - x_{n_k}\| \to 0$$

เนื่องจากลำดับ $\{x_{n_k}\}$ มีขอบเขต จึงมีลำดับย่อย $\{x_{n_{k_j}}\}$ ของ $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนสู่บาง $z^* \in \mathcal{H}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\langle f(z) - z, x_{n_k} - z\rangle &= \lim_{j\to\infty}\langle f(z) - z, x_{n_{k_j}} - z\rangle \\ &= \langle f(z) - x, z^* - z\rangle \qquad (4.34)\end{aligned}$$

จาก (4.29) และบทตั้ง 5.3 จะได้ $z^* \in \Omega$ โดย (4.34) และการนิยามของ $z = P_\Omega \circ f(z)$ จะได้

$$\limsup_{k\to\infty}\langle f(z) - z, x_{n_k} - z\rangle = \langle f(z) - z, z^* - z\rangle \leq 0 \qquad (4.35)$$

การจัดเรียง (4.30) และ (4.35) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\langle f(z) - z, x_{n_k+1} - z\rangle &\leq \limsup_{k\to\infty}\langle f(z) - z, x_{n_k} - z\rangle \\ &= \langle f(z) - z, z^* - z\rangle \\ &\leq 0 \qquad (4.36)\end{aligned}$$

โดย (4.36), $\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{\psi_n}\|x_n - x_{n-1}\| = 0$, **ขั้นที่ 3** และบทตั้ง 2.7 จะทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\|x_n - z\| = 0$

จากทฤษฎีบทข้างต้นทำให้ได้ทฤษฎีบทที่ใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าต่ำสุดแบบคอนเวกซ์ และปัญหาร่วมกันดังนี้

ทฤษฎีบท 4.6 ให้ $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไข 5 และลำดับ $\{x_n\}$ ก่อกำเนิดโดยการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 3 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนสู่ค่าต่ำสุดของ $\mathcal{S} + \mathcal{T}$

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ เป็นการส่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไข 5 และลำดับ $\{x_n\}$ ก่อกำเนิดโดยการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 4 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างเข้มสู่ค่าต่ำสุดของ $\mathcal{S} + \mathcal{T}$

ต่อไปจะทำการทดสอบประสิทธิภาพของการดำเนินการแบบของทีเซง ที่โครงการวิจัยนี้ได้นำเสนอและมีทฤษฎีบทยืนยันการมีอยู่จริงของผลเฉลยโดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.1 ให้ $\mathcal{H} = [0, 4]$ กำหนดการส่ง $\mathcal{K} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ และ $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ โดย

$$\mathcal{K}x = \frac{1}{4}(x-2) \quad \text{และ} \quad \mathcal{B}x = 4(x+\frac{1}{2})$$

เห็นว่าการส่งที่เสนอเป็นไปตามสมมติฐานในทฤษฎีบท 5.4 และทฤษฎีบท 5.5 สำหรับทุก $\eta > 0$ จะได้ว่า $J_{\eta}^{\mathcal{B}}(\mathcal{I} - \eta\mathcal{K})x = \dfrac{4-\eta}{4+16\eta}x$ ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพใช้การดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 1 (MTseng 1) การดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 2 (MTseng 2) และการดำเนินการแบบของทีเซง ใน (2.2) (Tseng) โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังนี้

1. MTseng 1 ให้ $\psi = \dfrac{1}{(10000(n+1))^2}$, $\varepsilon_n = \psi_n^2$, $\alpha = 3$, $\eta_1 = 0.09$, $\varphi_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ และ $\mu = 0.6$
2. MTseng 2 ให้ $f(x) = \dfrac{x}{99}$, $\psi = \dfrac{1}{(10000(n+1))^2}$, $\varepsilon_n = \psi_n^2$, $\alpha = 3$, $\eta_1 = 0.09$, $\varphi_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ และ $\mu = 0.6$
3. Tseng ให้ $\eta = 0.09$

ใช้ค่าเริ่มต้น x_1 แตกต่างกัน 4 กรณี และหยุดการคำนวณของแต่ละการดำเนินการเมื่อ

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq 10^{-10}$$

ซึ่งเวลามีหน่วยเป็นวินาทีและมีผลการคำนวณแสดงในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ผลการคำนวณเปรียบเทียบสำหรับตัวอย่างที่ 4.1

$x_0 = x_1$	MTseng 1		MTseng 2		Tseng	
	จำนวนรอบ	เวลา	จำนวนรอบ	เวลา	จำนวนรอบ	เวลา
0.5	25	0.01	25	0.01	68	0.02
1.5	25	0.01	25	0.01	70	0.02
2.5	25	0.01	25	0.01	72	0.02
3.5	26	0.01	26	0.01	73	0.02

จากตาราง 4.1 เห็นได้ว่าการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 1 (MTseng 1) และการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 2 (MTseng 2) มีประสิทธิภาพในการคำนวณเร็วกว่าการดำเนินการแบบของทีเซง (Tseng)

ตัวอย่างที่ 4.2 พิจารณาปัญหาค่าต่ำสุดดังนี้

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|x\|_1 + \|x\|_2^2 + (-2, 1, 4)x + 9,$$

เมื่อ $x = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3$ สามารถจัดรูปใหม่ตาม (1.3) คือ $\mathcal{S}(x) = \|x\|_2^2 + (\text{-}2, 1, 4)x + 9$ และ $\mathcal{T}(x) = \|x\|_1$ จะได้ว่า $\nabla\mathcal{S}(x) = 2x + (-2, 1, 4)^T$ ซึ่ง $\mathcal{S}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์และหาอนุพันธ์ได้ แกร์เดียนต์ $\nabla\mathcal{S}$ เป็นความต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์มี $\mathcal{L} = 2$ อีกทั้ง $\mathcal{T}$ ป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์และกึ่งต่อเนื่องล่าง แต่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}^3$ จากงานวิจัยของ Hale, Yin & Zhang (Hale, Yin & Zhang, 2007 : 1-45) ทำให้ทราบว่า

$$
\begin{aligned}
J_\eta^{\partial\mathcal{T}}(x) &= (I + \eta\partial\mathcal{T})^{-1}(x) \\
&= (\max\{|u_1| - \eta, 0\} sgn(u_1), \\
&\quad \max\{|u_2| - \eta, 0\} sgn(u_2), \\
&\quad \max\{|u_3| - \eta, 0\} sgn(u_3))^T
\end{aligned}
$$

สำหรับทุก $\eta > 0$ ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพได้ใช้ การดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 3 (MTseng 3) และการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 4 (MTseng 4) และการดำเนินการแบบของทีเซง ใน (2.2) (Tseng) ในกรณีที่ให้ $\mathcal{K} = \nabla\mathcal{S}$ และ $\mathcal{B} = \partial\mathcal{T}$ โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังนี้

1. MTseng 3 ให้ $\psi = \dfrac{1}{(10000(n+1))^2}$, $\varepsilon_n = \psi_n^2$, $\alpha = 3$, $\eta_1 = 0.49$, $\varphi_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ และ $\mu = 0.5$
2. MTseng 4 ให้ $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $\psi = \dfrac{1}{(10000(n+1))^2}$, $\varepsilon_n = \psi_n^2$, $\alpha = 3$, $\eta_1 = 0.49$, $\varphi_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ และ $\mu = 0.5$
3. Tseng ให้ $\eta = 0.49$

ใช้ค่าเริ่มต้น x_1 แตกต่างกัน 4 กรณี และหยุดการคำนวณของแต่ละการดำเนินการเมื่อ

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq 10^{-10}$$

ซึ่งเวลามีหน่วยเป็นวินาทีและมีผลการคำนวณแสดงในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.2 ผลการคำนวณเปรียบเทียบสำหรับตัวอย่างที่ 4.2

$x_0 = x_1$	MTseng 3		MTseng 4		Tseng	
	จำนวนรอบ	เวลา	จำนวนรอบ	เวลา	จำนวนรอบ	เวลา
$(2,1,3)^T$	82	0.03	82	0.03	1046	0.11
$(2,\text{-}5,4)^T$	85	0.03	85	0.04	1069	0.11
$(\text{-}150,150,100)^T$	95	0.03	95	0.04	1235	0.18
$(\text{-}3000,\text{-}5000,\text{-}700)^T$	108	0.03	108	0.04	1405	0.21

จากตาราง 4.2 เห็นได้ว่าการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 1 (MTseng 1) และการดำเนินการแบบของทีเซง แบบที่ 2 (MTseng 2) มีประสิทธิภาพในการคำนวณเร็วกว่าการดำเนินการแบบของทีเซง (Tseng)

ตัวอย่างที่ 4.3 พิจารณาแบบจำลองประมวลผลสัญญาณซึ่งสามารถแสดงเป็นระบบสมการเชิงเส้นดังต่อไปนี้

$$b = \mathcal{F}x + c \tag{4.37}$$

เมื่อ $x \in \mathbb{R}^N$ เป็นสัญญาณดั้งเดิม $b \in \mathbb{R}^M$ เป็นสัญญาณเสียที่ประกอบด้วยสัญญาณรบกวน c และ $\mathcal{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M (M < N)$ เป็นการดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต เป็นที่ทราบดีว่าปัญหา (4.37) สามารถแก้ปัญหาโดย

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\|\mathcal{F}x - b\|_2^2 + \eta\|x\|_1 \tag{4.38}$$

เมื่อ $\eta > 0$ ให้ $\mathcal{K} = \nabla \mathcal{S}$ และ $\mathcal{B} = \partial \mathcal{T}$ ซึ่งจะได้ $\mathcal{S}(x) = \frac{1}{2}\|\mathcal{F}x - b\|_2^2$ และ $\mathcal{T}(x) = \eta\|x\|_1$ แล้ว $\nabla \mathcal{S}(x) = \mathcal{F}^T(\mathcal{F}x - b)$ และ $\partial \mathcal{T}(x) = \partial(\eta\|x\|_1)$ ที่ $\mathcal{K}$ เป็น $\|\mathcal{F}\|_2^2$-ลิพชิทซ์แบบต่อเนื่องและทางเดียว โดยมีค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย คือ

$$\text{MSE} = \frac{\|x_n - x\|^2}{N}$$

เมื่อ x_n เป็นค่าประมาณสัญญาณของ x

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพได้ใช้ MTseng 3, MTseng 4 และ Tseng ในกรณีที่ให้ $\mathcal{K} = \nabla \mathcal{S}$ และ $\mathcal{B} = \partial \mathcal{T}$ โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังนี้

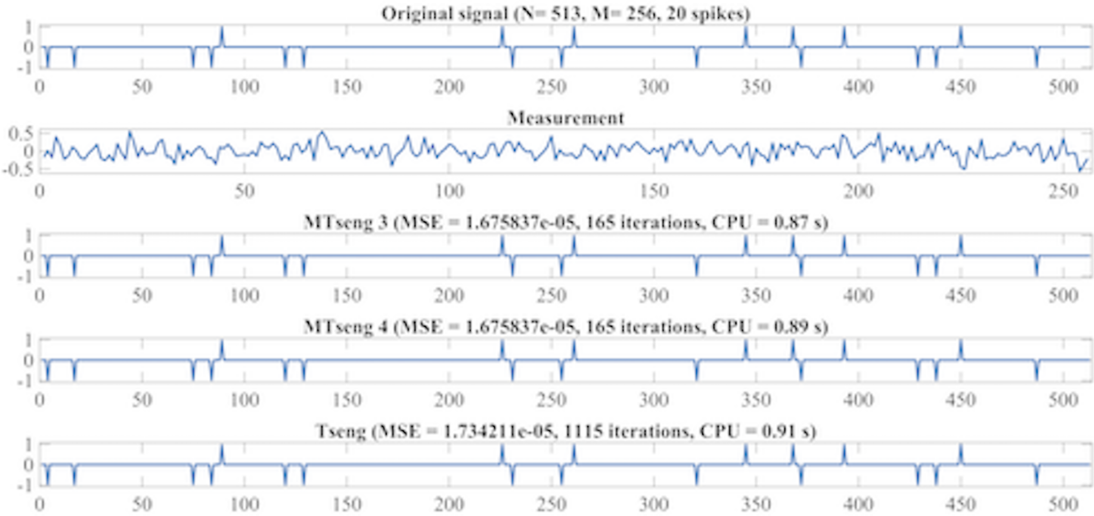
1. MTseng 1 ให้ $\psi = \frac{1}{(10000(n+1))^2}$, $\varepsilon_n = \psi_n^2$, $\alpha = 3$, $\eta_1 = 0.09$, $\varphi_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ และ $\mu = 0.6$
2. MTseng 2 ให้ $f(x) = \frac{x}{2}$, $\psi = \frac{1}{(10000(n+1))^2}$, $\varepsilon_n = \psi_n^2$, $\alpha = 3$, $\eta_1 = 0.09$, $\varphi_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ และ $\mu = 0.6$
3. Tseng ให้ $\eta = \frac{0.04}{\|\mathcal{F}\|_2^2}$ เมื่อ $\mathcal{F}$ เป็นการดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต

พิจารณาการประมวลผลสัญญาณจากแบบจำลอง 2 กรณีต่อไปนี้

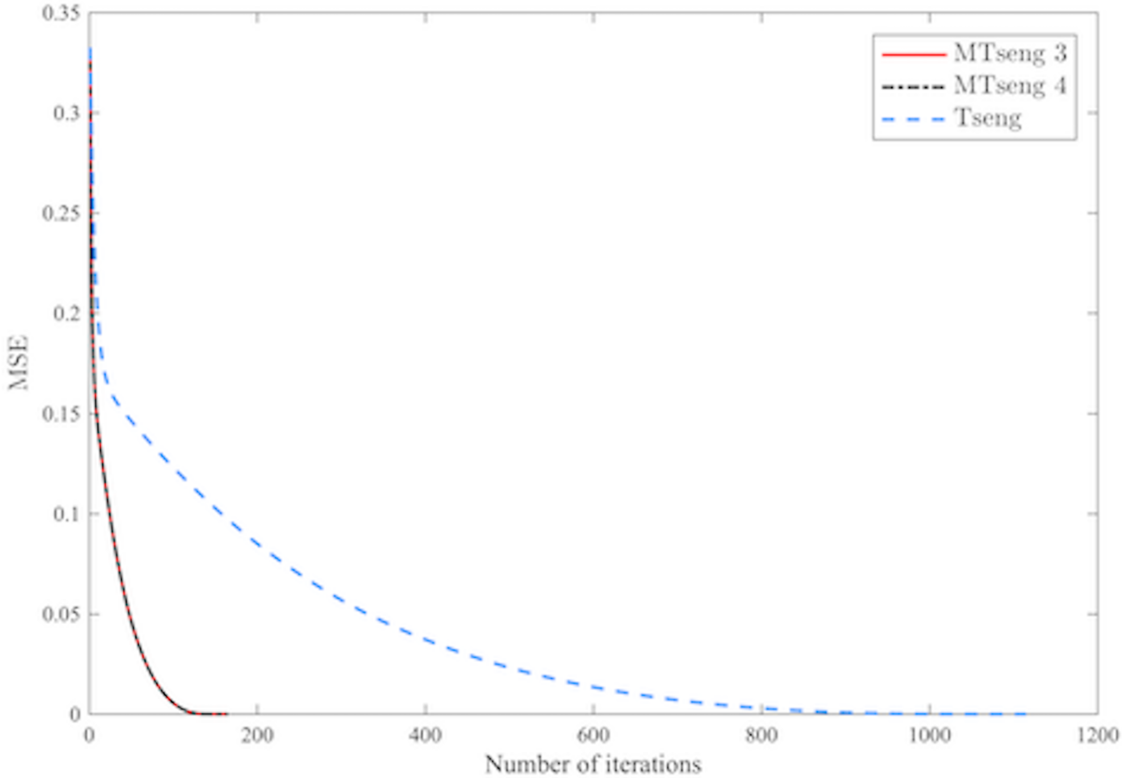
กรณี 1 ให้ $N = 513$, $M = 256$ และ $m = 20$

กรณี 2 ให้ $N = 1024$, $M = 512$ และ $m = 50$

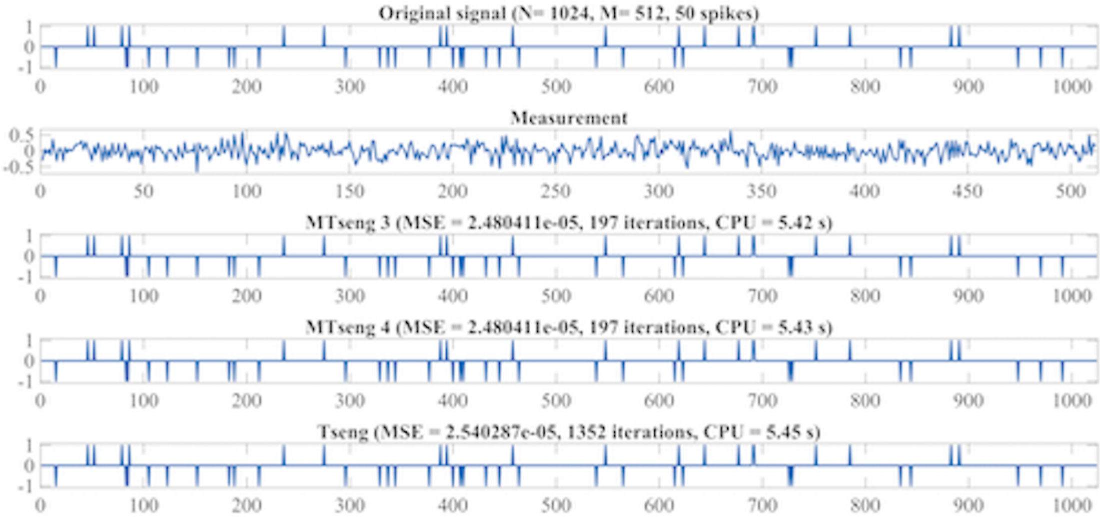
ซึ่งผลเปรียบเทียบการประมวลผลสัญญาณจากแบบจำลองด้วยการดำเนินการต่าง ๆ ดังภาพที่ 4.1-4.4



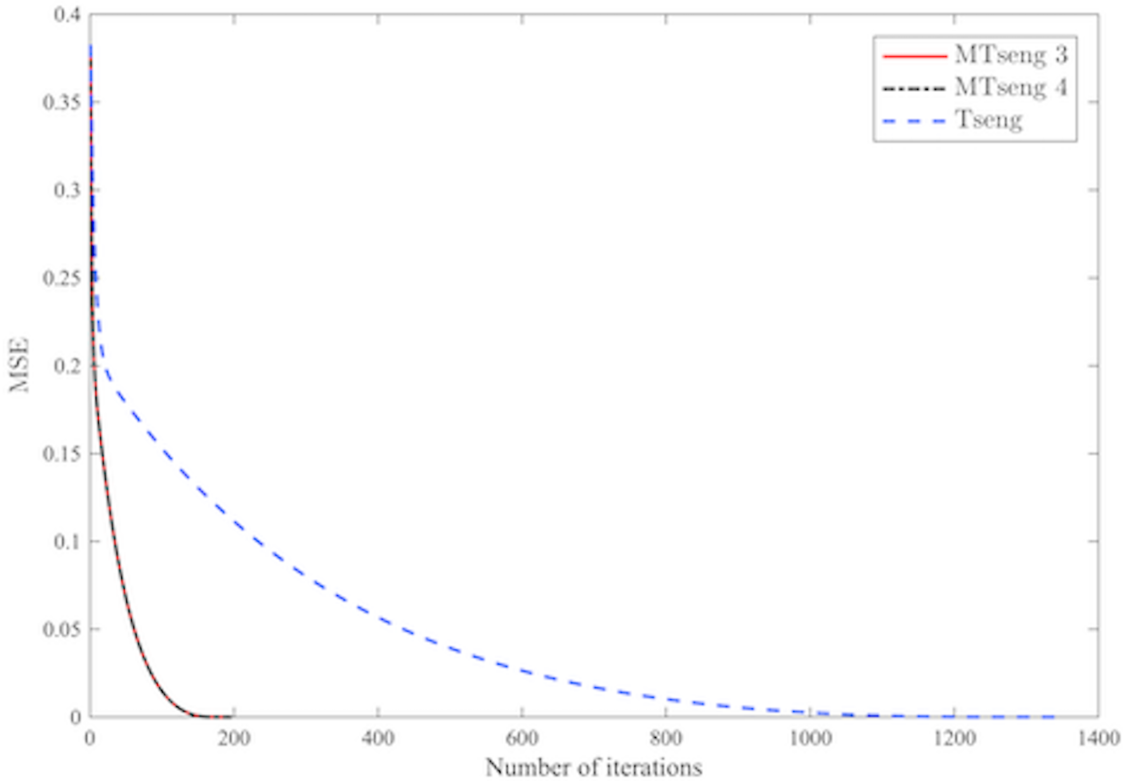
ภาพที่ 4.1 การประมวลผลสัญญาณของกรณี 1



ภาพที่ 4.2 ค่า MSE ของกรณี 1



ภาพที่ 4.3 การประมวลผลสัญญาณของกรณี 2



ภาพที่ 4.4 ค่า MSE ของกรณี 2