บทที่ 2
แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เป็นที่ทราบกันดีว่าทฤษฎีของการส่งแบบหลายค่ามีการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีการควบคุม การเพิ่มประสิทธิภาพนูน สมการเชิงอนุพันธ์ และเศรษฐศาสตร์ Nadler (Nadler,1969: 457-488) สรุปหลักการหดตัวของบานาคที่รู้จักกันดีในการส่งแบบหลายค่า ซึ่งกลายเป็นแหล่งแรงบันดาลใจที่ยิ่งใหญ่สำหรับนักวิจัยที่ทำงานในทฤษฎีจุดตรึงแบบเมตริก มีความพยายามหลายครั้งที่จะสรุปผลลัพธ์นี้ในหน่วยเมตริกและพื้นที่อื่น ๆ โดยผู้เขียนหลายคนลักษณะทั่วไปที่โดดเด่นบางอย่าง เช่น ผลลัพธ์ปลายทางบางอย่างสำหรับมัลติฟังก์ชันการหดตัวที่อ่อนแอโดยทั่วไป β , เมตริก Hausdorff บางส่วนและทฤษฎีบทจุดตรึงของ Nadler บนปริภูมิเมตริกบางส่วน, ในระดับทั่วไปของการส่ง Picard ที่อ่อนแอหลายค่า, การส่งแบบหดตัวแบบไม่เชิงเส้นหลายค่า, การส่งการหดตัวหลายค่าในปริภูมิเมตริกทั่วไป, ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการหดตัวที่กำหนดค่าในเมตริกที่สมบูรณ์ปริภูมิ, ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งค่าที่กำหนดไว้, ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าเมื่อปริภูมิเมตริกสมบูรณ์, จุดตรึงของการหดตัว F ที่กำหนดไว้และการประยุกต์ใช้กับสมการปริพันธ์ไม่เชิงเส้น และในงานล่าสุด Khojasteh และคณะ (Khojasteh et al., 2015: 1189-1194) นำเสนอแนวคิดเรื่องการหดตัวของ □ โดยใช้คลาสของฟังก์ชันควบคุมที่เรียกว่าฟังก์ชันการจำลอง และรวมผลลัพธ์หลายๆ อย่างของวรรณกรรมเกี่ยวกับการส่งค่าเดียว Olgun และคณะ (Olgun et al., 2016: 832-837) ได้รับผลลัพธ์จุดตรึงสำหรับการหดตัวแบบ □ ทั่วไป นอกจากนี้ de-Hierro และคณะ (de-Hierro et al., 2015: 345-355) ขยายคลาสของฟังก์ชันการจำลองสำหรับการจับคู่ และได้รับทฤษฎีบทจุดโดยบังเอิญ

ในเวลาต่อมา Samet และคณะแนะนำแนวคิดของการยอมรับ α ที่น่าสนใจเนื่องจากไม่ต้องการเงื่อนไขการหดตัวหรือเงื่อนไขประเภทการหดตัวเพื่อยึดจุดทุกคู่ในโดเมนซึ่งแตกต่างจาก BCP รวมถึงกรณีของการส่งที่ไม่ต่อเนื่อง ขณะนี้มีการเติบโตอย่างมากในวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับปัญหาจุดตรึงผ่านการส่ง α ที่ยอมรับได้โดย Karapinar, Kuman และSamet ต่อมาในปี ค.ศ. 2018 Karapinar ได้แนะนำแนวคิดเรื่องการหดตัวของ □ ที่ยอมรับได้และสรุปผลลัพธ์ของ Samet & Khojasteh เมื่อเร็ว ๆ นี้ Radenovic & Chandok ได้ขยายคลาสของฟังก์ชันการจำลอง และสรุปผลลัพธ์ที่ได้รับในด้วยแรงบันดาลใจจากผลลัพธ์ของ Karapinar & Radenovic ในบทความนี้เราขยายคลาสของการส่ง α ที่ยอมรับได้สำหรับการส่งแบบหลายค่า และกำหนดการส่งแบบหดตัวของ □ หลายค่า ที่ยอมรับได้ของ α และการส่งแบบหดตัวของ □ หลายค่าทั่วไปที่ยอมรับได้แบบ α ต่อจากนั้น เราได้รับผลลัพธ์จุดตรึงสำหรับสิ่งเหล่านี้การส่งตัวอย่างที่เป็นประโยชน์ และผลที่ตามมาจะถูกนำเสนอเพื่อแสดงความสามารถในการใช้งานของผลลัพธ์ที่ได้รับ

จุดมุ่งหมายของส่วนนี้คือการนำเสนอแนวคิดและผลลัพธ์ที่ใช้ในบทความสำหรับเซตว่าง X และให้ $\mathrm{P}(X)$ แทนค่ากำลังของ X ถ้า (X,d) เป็นหน่วยปริภูมิเมตริกดังนี้

$$\mathrm{N}(X) = \mathrm{P}(X) - \{\phi\},$$

$$CB(X) = \{A \in \mathrm{N}(X) : A \text{ คือ เซตปิด และมีขอบเขต}\},$$

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A \text{ and } b \in B\},$$

$$d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b),\ a \in X,$$

$$\mathrm{H}(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B),\ \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}.$$

แนวคิดของการส่ง α-admissible และ α-admissible ได้รับการแนะนำโดย Samet & Karapinar ตามลำดับดังนี้

บทนิยาม 2.1 กำหนดให้ $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$. ส่งผ่านตัวเองโดย $T : X \to X$ เรียกว่า α-admissible โดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้

$$x, y \in X,\ \alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx,Ty) \geq 1$$

นอกจากนี้การส่งผ่านตัวเอง T จะเรียกว่ารูปสามเหลี่ยม α-admissible ถ้า T เป็น α-admissible และ

$$x, y, z \in X,\ \alpha(x,z) \geq 1 \text{ and } \alpha(z,y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(x,y) \geq 1$$

นอกจากนี้ Asl และคณะ (Asl et al., 2012) แนะนำแนวคิดของการส่ง α_*-admissible ที่ยอมรับได้ ซึ่งเป็นเวอร์ชั่นที่มีหลายค่าของการส่ง α-admissible

บทนิยาม 2.2 กำหนดให้ X เป็นเซตว่าง โดย $T : X \to \mathrm{N}(X)$ และ $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ ซึ่งเรียก T ว่า α_*-admissible โดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้

$$x, y \in X,\ \alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx,Ty) \geq 1$$

นอกจากนี้การส่งผ่านตัวเอง T จะเรียกว่ารูปสามเหลี่ยม α-admissible ถ้า T เป็น α-admissible และ

$$x, y \in X,\ \alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow \alpha_*(Tx,Ty) \geq 1,$$

โดยที่ $\alpha_*(Tx,Ty) = \inf\{\alpha(a,b) \mid a \in Tx,\ b \in Ty\}$

ในทางกลับกัน Mohammadi และคณะ (Mohammadi et al., 1989) ได้ขยายแนวคิดของการส่งที่ยอมรับได้ α_* เป็น α - admissible ดังนี้

บทนิยาม 2.3 กำหนดให้ X เป็นเซตว่าง โดย $T: X \to \mathrm{N}(X)$ และ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ ซึ่งเรียก T ว่า α-admissible ถ้าสำหรับทุก $x \in X$ และ $y \in Tx$

$$\alpha(x,y) \ge 1 \Rightarrow \alpha(y,z) \ge 1 \text{ สำหรับทุก } z \in Ty$$

บทนิยาม 2.4 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ โดยปริภูมิเมตริก (X,d) เรียกว่า α-complete ก็ต่อเมื่อทุกลำดับโคชี Cauchy $\{x_n\}$ กับ $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ลู่เข้าสู่ X

บทนิยาม 2.5 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ และ $T: X \to CB(X)$ แล้วเรียก T ว่า α-continuous การส่งแบบหลายค่าบน $(CB(X), \mathrm{H})$ ถ้าทุกลำดับ $\{x_n\}$ กับ $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ โดยที่ $n \to \infty$ และ $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ โดย $Tx_n \xrightarrow{\mathrm{H}} Tx$ โดยที่ $n \to \infty$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ และ $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}(Tx_n, Tx) = 0$

ในเวลาต่อมา Khojasteh และคณะ กำหนดคลาสใหม่ของการส่งแบบหดตัวโดยใช้คลาสของฟังก์ชันการจำลองต่อไปนี้

บทนิยาม 2.6 ฟังก์ชันการจำลองคือการส่ง $\zeta: [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้:

($\zeta 1$) $\zeta(0,0) = 0$,

($\zeta 2$) $\zeta(t,s) < s - t$ สำหรับ $t, s > 0$,

($\zeta 3$) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = l \in (0,\infty)$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$

ในเวลาต่อมา Argoubi และคณะ แก้ไขนิยามของฟังก์ชันการจำลองเล็กน้อยโดยการถอนเงื่อนไข ($\zeta 1$)

บทนิยาม 2.7 ฟังก์ชันการจำลองคือการส่ง $\zeta: [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ โดยมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้:

(i) $\zeta(t,s) < s - t$ สำหรับทุก $t, s > 0$,

(ii) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ และ $t_n < s_n$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$

ให้ $\mathcal{Z}$ หมายถึงตระกูลของฟังก์ชันการจำลองทั้งหมด สำหรับตัวอย่างและผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันการจำลอง

บทนิยาม 2.8 กำหนดให้ T ส่งผ่านตัวเองในปริภูมิเมตริก X กับเมตริก d และกำหนดให้ $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ ดังนี้

$$\zeta(\alpha(x,y)d(Tx,Ty), d(x,y)) \ge 0 \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

แล้วเรียก T ว่าการหดตัวของ □ ที่ยอมรับได้เมื่อเทียบกับ ζ โดยที่ $\zeta \in \mathrm{Z}$

เมื่อเร็วๆ นี้ในปี ค.ศ. 1960 Radenovic & Chandok และในปี ค.ศ. 1968 Liu และคณะได้ขยายคลาสของฟังก์ชันการจำลองและได้รับความบังเอิญ และผลลัพธ์ของค่าคงที่ของจุดตรึง

บทนิยาม 2.9 การส่ง $G:[0,\infty)^2 \to \Box$ เรียกว่าฟังก์ชัน C-class ถ้าเป็นต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้:

(i) $G(s,t) \le s,$

(ii) $G(s,t) = s$ หมายถึง $s = 0$ หรือ $t = 0$ สำหรับทุก $s,t \in [0,\infty)$

บทนิยาม 2.10 ฟังก์ชันการจำลอง C_G-simulation คือการส่ง $\zeta :[0,\infty)^2 \to \Box$ ดังนี้

(i) $\zeta(t,s) < G(s,t)$ สำหรับทุก $t,s > 0,$ โดยที่ $G:[0,\infty)^2 \to \Box$ คือ ฟังก์ชัน C-class

(ii) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ และ $t_n < s_n$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < C_G$

บทนิยาม 2.11 การส่ง $G:[0,\infty)^2 \to \Box$ มีคุณสมบัติ C_G ถ้ามีค่า $C_G \ge 0$ โดยที่

(i) $G(s,t) \ge C_G$ โดยที่ $s > t,$

(ii) $G(t,t) \le C_G$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$

กำหนดให้ $\Box_G$ หมายถึงตระกูลของฟังก์ชันการจำลอง C_G ทั้งหมด $\zeta :[0,\infty)^2 \to \Box$ ระบุบทนิยามต่อไปนี้โดยใช้ $g = I$ ในบทนิยาม 2.1 และ 2.2

บทนิยาม 2.12 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \times X$ ส่งผ่านตัวเอง ซึ่งการส่งผ่าน T เรียกว่าการหดตัวแบบ $\Box_G$ ($\Box_G$-contraction) ถ้าค่า $\zeta \in \Box_G$ โดยที่

$$\zeta(d(Tx,Ty), d(x,y)) \ge C_G \text{ สำหรับทุก } x, y \in X \text{ ซึ่ง } x \ne y$$

ถ้า $C_G = 0$ แล้วจะได้การหดตัวของ□

บทนิยาม 2.13 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \times X$ ส่งผ่านตัวเอง ซึ่งการส่งผ่าน T เรียกว่าการหดตัวของ □$_G$ ถ้าค่า $\zeta \in$ □$_G$ โดยที่

$$\zeta\left(d(Tx,Ty), \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}\right) \geq C_G$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ ซึ่ง $x \neq y$ ถ้า $C_G = 0$ แล้วจะได้การหดตัวของ□

บทตั้ง 2.1 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\{x_n\}$เป็นลำดับใน X โดยที่ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ ถ้า $\{x_n\}$ ไม่เป็นโคชี (Cauchy) แล้วมีค่า $\varepsilon > 0$ และมีสองเซตย่อย $\{x_{m(k)}\}$ และ $\{x_{n(k)}\}$ ของ $\{x_n\}$ โดยที่ $n(k) > m(k) > k$ โดยที่

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) = \varepsilon$$

และ

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)+1}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) = \varepsilon$$

ทั้งนี้ทฤษฎีจุดตรึงมีบทบาทสำคัญในหลาย ๆ ด้าน เช่นการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ สมการปริพันธ์ และอื่น ๆ ในปี ค.ศ. 1906 Maurice Frechet ได้แนะนำแนวคิดของ (H,ϖ) ปริภูมิเมตริกมาตรฐานเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน และโทโพโลยี การหดตัวของบานาค หลักการเป็นหนึ่งในผลลัพธ์ที่สำคัญที่สุดของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน และได้นำไปสู่การเก็งกำไรที่น่าทึ่ง ผู้เขียนหลายคนใช้หลักการของบานาคซึ่งแนวคิดหลักของบทความนี้คือการใช้ฟังก์ชันการจำลองเพื่อเชื่อมโยงบางส่วนผลลัพธ์จุดตรึงตามที่กำหนดโดย ในปี 2015 Khojasteh และคณะ (Khojasteh et al., 2015: 1189-1194) ในปี ค.ศ. 2012 Samet และคณะ (Samet et al., 2012: 2154-2165) ได้นำเสนอผลลัพธ์แบบจุดตรึงแบบหดตัวใหม่ของการหดตัวแบบ $(\alpha-\Psi)$ ฟังก์ชัน ในปี ค.ศ. 2014 Popescu (Popescu, 2014: 1-12) ได้แนะนำแนวคิดของรูปสามเหลี่ยม α ฟังก์ชันที่ยอมรับได้ของวงโคจรและแสดงผลลัพธ์จุดตรึงหลายจุดด้วยการหดตัวแบบ α-Geraghty ทั่วไปและ α-orbital แบบสามเหลี่ยมฟังก์ชันที่ยอมรับได้ ในปี ค.ศ. 2015 Khojasteh และคณะ แนะนำการหดตัวของ □ ซึ่งสรุปกฎการหดตัวของ Banach โดยการรวมประเภทต่าง ๆ ของการหดตัวไม่เชิงเส้น ในปี ค.ศ. 2016 Karapinar ได้แนะนำแนวคิดของ $\alpha-$□ การหดตัวที่ยอมรับได้โดยใช้ฟังก์ชันการจำลองและกำหนดผลลัพธ์จุดตรึงด้วยความช่วยเหลือของสามเหลี่ยม α-orbital admissible การส่งในปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ ในปี ค.ศ. 2018 Aydi และคณะ (Aydi, 2018: 10-24) พิสูจน์ผลลัพธ์จุดตรึงสำหรับการหดตัวแบบ □ ที่ยอมรับได้โดยใช้รูปสามเหลี่ยม α การส่งที่ยอมรับได้ของวัฏจักรในปริภูมิกึ่งเมตริกที่สมบูรณ์ล่าสุด Chandok และคณะ (Chandok, 2015: 194-202) แสดงให้เห็นผลลัพธ์บางส่วนผ่านการจำลองการส่งสำหรับฟังก์ชันการหดตัวแบบ Geraghty ในบทความนี้ ϖ ย่อมาจาก metric และ (H,ϖ) หมายถึงปริภูมิเมตริก ในปี ค.ศ. 2555 Samet และคณะ นำเสนอแนวคิดของฟังก์ชัน α-admissible และ $(\alpha-\Psi)$-contractive type การส่ง และกำหนดผลลัพธ์จุดตรึงสำหรับการส่งดังกล่าว

บทนิยาม 2.14 กำหนดให้ $Q:H\to H$ และกำหนดให้ $\alpha:H\times H\to[0,+\infty)$ แล้วเรียก Q ว่า α-admissible ถ้า $\alpha(\boldsymbol{\Omega},\square)\geq 1\Rightarrow\alpha(Q\boldsymbol{\Omega},Q\square)\geq 1$ สำหรับทุก $\boldsymbol{\Omega},\square\in H$

บทนิยาม 2.15 กำหนดให้ ψ เป็นคลาสของการส่ง Ψ: [0, +∞) ⟶ [0, +∞) ซึ่งเงื่อนไขดังต่อไปนี้:

(i) Ψ เป็นครึ่งบนต่อเนื่อง และเพิ่มขึ้นอย่างเคร่งครัด

(ii) $\{\Psi^f(\ell)\}$ ลู่เข้า 0 โดยที่ $f\to\infty$ สำหรับทุก $l>0$ และ $f\in\square_+$

(ii) $\Psi(\ell)<\ell$ ลู่เข้า 0 สำหรับทุก $l>0$

เรียกฟังก์ชันเหล่านี้ว่าว่าฟังก์ชันเปรียบเทียบ (Comparison functions)

บทนิยาม 2.16 กำหนดให้ $Q:H\to H$ เป็นการส่งผ่านตัวเองในปริภูมิเมตริก (H,ϖ) แล้วเรียก Q ว่าการส่งแบบ $\alpha-\Psi$ ของการหดตัวหากมีสองการส่ง $\psi\in\Psi$ และ $\alpha:H\times H\to[0,+\infty)$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$\alpha(\boldsymbol{\Omega},\vartheta)\varpi(Q\boldsymbol{\Omega},Q\vartheta)\leq\psi(\varpi(\boldsymbol{\Omega},\vartheta)) \text{ สำหรับทุก } \boldsymbol{\Omega},\vartheta\in H$$

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ $Q:H\to H$ เป็นการส่ง $\alpha-\Psi$ contractive ใน (H,ϖ) ซึ่งเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันและต่อเนื่องกันนอกจากนี้ Q ยังเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้:

(i) Q ต่อเนื่อง

(ii) Q คือ α-admissible

(iii) ค่า $\Omega_0\in H$ โดยที่ $\alpha(\Omega_0,Q\Omega_0)\geq 1$

แล้ว Q มีจุดตรึงใน H

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $Q:H\to H$ เป็นการส่ง $\alpha-\Psi$ contractive ใน (H,ϖ) ซึ่งเป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน และต่อกัน นอกจากนี้ Q ยังเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้:

(i) ถ้า $\{\Omega_0\}$ เป็นลำดับใน H โดยที่ $\alpha(\Omega_n,\Omega_{n+1})\geq 1$ และ $\Omega_n\in\boldsymbol{\Omega}$ แล้ว $\alpha(\Omega_n,\boldsymbol{\Omega})\geq 1$

(ii) Q คือ α-admissible

(iii) ค่า $\Omega_0\in H$ โดยที่ $\alpha(\Omega_0,Q\Omega_0)\geq 1$

แล้ว Q มีจุดตรึงใน H

ในค.ศ. 2014 Popescu ได้แนะนำแนวคิดของสามเหลี่ยม α-orbital admissible ดังต่อไปนี้:

บทนิยาม 2.16 กำหนดให้ $\mathrm{Q}:\mathrm{H}\rightarrow\mathrm{H}$ เป็นการส่งและเป็นฟังก์ชัน ซึ่งเรียก H คือ α -orbital admissible ถ้า

$$\alpha(\mathbf{\Omega},\mathrm{Q}\Omega)\geq 1 \Rightarrow \alpha(\mathrm{Q}\mathbf{\Omega},Q^2\Omega)\geq 1$$

นอกจากนั้นเรียก H คือ α -orbital admissible ถ้า

$$\alpha(\mathbf{\Omega},\square)\geq 1 \text{ และ } \alpha(\square,\mathrm{Q}\square)\geq 1 \Rightarrow \alpha(\mathbf{\Omega},\mathrm{Q}\square)\geq 1$$

แล้ว Q เป็นไปตามบทนิยามที่ 2.16

2.1 ฟังก์ชันการจำลอง

ในปี ค.ศ. 2015 Khojasteh และคณะ แนะนำฟังก์ชันการจำลอง และแนะนำฟังก์ชันการจำลองและใช้สิ่งที่เทียบเท่าเพื่อสรุปกฎการหดตัวของบานาคต่อจากนี้ไป โรลแดน และคณะ และ Argoubi และคณะ แก้ไขแนวคิดของฟังก์ชันการจำลอง และแสดงทฤษฎีบทแบบจุดตายตัวทั่วไปบางส่วนโดยใช้ฟังก์ชันการจำลองแบบใหม่ที่ใหญ่ขึ้น

บทนิยาม 2.17 การส่ง $\Lambda:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\rightarrow\mathrm{R}$ ถ้าเป็นฟังก์ชันการจำลองหากมีคุณสมบัติต่อไปนี้

(i) $\Lambda(0,0)=0$

(ii) $\Lambda(e,f)<e-f$ สำหรับทุก $e,f>0$

(iii) ถ้า $\{e_n\},\{f_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,\infty)$ โดยที่ $e_n=f_n=l\in(0,\infty)$ แล้ว $\sup\Lambda(e_n,f_n)<0$

Argoubi และคณะ สังเกตว่าเงื่อนไข (i) สามารถพิสูจน์ผลลัพธ์ได้โดยไม่ต้องคำนึงถึง (i)

บทนิยาม 2.18 การส่ง $\Lambda:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\rightarrow\mathrm{R}$ เป็นที่ทราบกันว่าเป็นฟังก์ชันการจำลองหากเป็นไปตาม (ii) และ (iii)

ในปี ค.ศ. 2558 Roldan และคณะ สังเกตว่าเงื่อนไขที่สาม (กล่าวคือ (iii)) มีความสมมาตรในอาร์กิวเมนต์ทั้งสองของ Λ แต่ในการพิสูจน์คุณสมบัตินี้ไม่จำเป็น อันที่จริงอาร์กิวเมนต์ของ Λ มีความหมายต่างกันและมีบทบาทต่างกัน จากนั้นโรลแดนและคณะปรับปรุงสภาพเล็กน้อย (iii) ดังนี้

(iii) ถ้า $\{e_n\},\{f_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,\infty)$ โดยที่ $e_n=f_n=l\in(0,\infty)$ และ $e_n<f_n$ สำหรับทุก $n\in Z_+$ แล้ว $\sup\Lambda(e_n,f_n)<0$

ตระกูลของฟังก์ชันการจำลองทั้งหมด $\Lambda:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\rightarrow\mathrm{R}$ ในแง่ของ Argoubi นั้นเขียนแทนด้วย □ ต่อไป เรานำเสนอตัวอย่างบางส่วนของฟังก์ชันการจำลอง

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $\Lambda_i : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathrm{R}$ โดยที่ $i = 1,2,3,4,5$ นิยามโดย

1. $\Lambda \in □$ โดยที่ $\lambda \in [0,1\}$
2. $\Lambda_2(a,b) = \dfrac{b}{b+1} - a,\ \forall a,b \in [0,+\infty)$
3. $\Lambda_3(a,b) = \Psi(b) - \phi_1(a),\ \forall a,b \in [0,+\infty)$ โดยที่ $\phi_1, \Psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ เป็นสองฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $\Psi(a) = \phi_1(a) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ และ $\Psi(a) < a \le \phi_1(a), \forall a > 0$
4. $\Lambda_4(a,b) = b - \eta(b) - a,\ \forall a,b \in [0,+\infty)$ โดยที่ $\eta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องแบบล่างเช่นว่า $\eta(a) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$
5. $\Lambda_5(a,b) = b - \int_0^a \psi(u)du,\ \forall a,b \in [0,+\infty)$ โดยที่ $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $\int_0^\varepsilon \psi(a)da$ มีค่า และ $\int_0^\varepsilon \psi(a)da > \varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

ในปี ค.ศ. 2015 Khojasteh และคณะ ใช้คลาสของฟังก์ชันเสริมเพื่อกำหนดการหดตัว □ ดังนี้

บทนิยาม 2.19 กำหนดให้ Q เป็นการส่งผ่านตัวเองใน (H,ϖ) และ $\Lambda \in \mathrm{Z}$ แล้ว Q คือ การหดตัวของ □ หรือ □-contraction เกี่ยวกับ Λ ถ้า $\Lambda(\varpi(\mathrm{Q}\mathbf{\Omega},\mathrm{Q}□),\varpi(\mathbf{\Omega},□)) \ge 0$ สำหรับทุก $\mathbf{\Omega},□ \in \mathrm{H}$

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ (H,ϖ) เป็นพื้นที่เมตริกที่บริบูรณ์ และ $g : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ เป็นการหดตัวของ □ หรือ □-contraction การหดตัวตามฟังก์ชันการจำลอง Λ จากนั้น g จะมีจุดคงที่เฉพาะใน H ในปี ค.ศ. 2016 Karapinar ได้แนะนำ การหดตัวของ □ ที่ยอมรับได้แบบ α หรือ α-admissible และ□ -contraction และสร้างผลลัพธ์บางประการดังนี้

บทนิยาม 2.20 กำหนดให้ Q เป็นการส่งผ่านใน (H,ϖ) ถ้าค่าของ $\Lambda \in □$ โดยที่ $\alpha : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to [0,+\infty)$ โดยที่ $\Lambda(\alpha(\Omega,□)\varpi(\mathrm{Q}\mathbf{\Omega},\mathrm{Q}□),\varpi(\mathbf{\Omega},□) \ge 0$ สำหรับทุก $\mathbf{\Omega},□ \in \mathrm{H}$ แล้ว เรียก Q ว่าการหดตัวของ □ ที่ยอมรับได้แบบ α หรือ α-admissible และ□ -contraction เกี่ยวกับ Λ

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ S คือ การหดตัวของ □ ที่ยอมรับได้แบบ α หรือ α-admissible และ□ -contraction เกี่ยวกับ Λ อย่างครบถ้วนตามเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) มีค่า $x_0 \in \mathrm{H}$ โดยที่ $\alpha(x_0, Sx_0) \ge 1$

(ii) S คือ รูปสามเหลี่ยม α-orbital admissible

(iii) S ต่อเนื่อง

แล้วค่าของ $\mathbf{\Omega} \in \mathrm{H}$ โดยที่ $S\Omega = \Omega$

ทฤษฎีบท 2.4 กำหนดให้ S คือ การหดตัวของ □ ที่ยอมรับได้แบบ α หรือ α-admissible และ□ -contraction เกี่ยวกับ Λ ในปริภูมิกึ่งเมตริกที่สมบูรณ์ และเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

(i) ถ้า $x_0 \in \mathrm{H}$ โดยที่ $\alpha(x_0, Sx_0) \geq 1$ และ $\alpha(Sx_0, x_0) \geq 1$

(ii) S คือ รูปสามเหลี่ยม α-orbital admissible

(iii) S ต่อเนื่อง

แล้วค่าของ $\mathbf{\Omega} \in \mathrm{H}$ โดยที่ $S\Omega = \Omega$

กำหนดให้ $\mathrm{Q}, \mathrm{W} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ คือการส่งสองฟังก์ชัน เราระบุชุดของความบังเอิญ และจุดตึงทั่วไปของ Q และโดย Q, W และ Q, W โดยที่

$(\mathrm{Q}, \mathrm{W}) = \{z \in \mathrm{H} : \mathrm{Q}z = \mathrm{W}z\}$ และ $C(\mathrm{Q}, \mathrm{W}) = \{z \in \mathrm{H} : \mathrm{Q}z = \mathrm{W}z = z\}$

กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $T : X \to X$ คือการส่ง จากนั้นจะเรียก T ว่าตัวดำเนินการ Picard บน X ถ้า T มีจุดตรึงที่ไม่ซ้ำกัน และลำดับของการประมาณที่ต่อเนื่องกันสำหรับจุดเริ่มต้นใด ๆ ลู่เข้าสู่จุดตรึงแนวคิดของตัวดำเนินการ Picard มีความเกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับการส่งแบบหดตัวเกือบบนปริภูมิเมตริกเป็นที่ทราบกันดีว่าการส่งแบบหดตัวเกือบทั้งหมดเป็นตัวดำเนินการ Picard บนปริภูมิเมตริกทั้งหมดเมื่อพิจารณาถึงฟังก์ชันการจำลองเราได้ให้ตัวดำเนินการ Picard คลาสใหม่บนช่องว่างเมตริกทั้งหมด แนวคิดของฟังก์ชันการจำลองถูกกำหนดโดย Khojasteh และคณะ ในทฤษฎีจุดตรึง ให้ $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to$□ เป็นการส่ง จากนั้นจะเรียก ζ ว่าฟังก์ชันการจำลองหากเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

(ζ_1) $\zeta(0,0) = 0$

(ζ_2) $\zeta(t,s) < s - t$ สำหรับทุก $t, s > 0$

(ζ_3) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0, \infty)$ โดยที่ $\lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} s_n > 0$ แล้ว $\limsup_{n \to \infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$

เราแสดงถึงชุดของฟังก์ชันการจำลองทั้งหมดโดย □ ตัวอย่างเช่น $\zeta(t,s) = \lambda s - t$ กับ $0 \leq \lambda < 1$ ที่เป็นของ □ และตัวอย่างต่าง ๆ ของฟังก์ชันการจำลองแต่ก่อนที่จะให้ผลลัพธ์หลักโดยให้นิยามและทฤษฎีบทดังต่อต่อไปนี้

บทนิยาม 2.21 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T : X \to X$ เป็นการส่ง และ $\zeta \in$□ จากนั้น เรียก T ว่าการหดตัว □ เทียบกับ ζ หากเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\zeta(d(Tx, Ty), d(x, y)) \geq 0 \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

เมื่อคำนึงถึงบทนิยาม 2.21 เราสามารถพูดได้ว่าการหดตัวของบานาคทุกครั้งเป็นการหดตัวของ □ เทียบกับ $\zeta(t,s) = \lambda s - t$ กับ $0 \leq \lambda < 1$ นอกจากนี้จากบทนิยามของฟังก์ชันการจำลองนั้น $\zeta(t,s) < 0$ สำหรับทุก $t \geq s > 0$ ดังนั้น ถ้า T เป็นการหดตัวของ □ หรือ □ -contraction เทียบกับ $\zeta \in$□ แล้ว

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \text{ สำหรับทุก } x, y \in X$$

นี่แสดงให้เห็นว่าการส่งผ่านการหดตัวของ □ ทุกครั้งเป็นการหดตัวจึงเป็นไปอย่างต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.5 การหดตัวของ □ ทั้งหมดในปริภูมิเมตริกที่บริบูรณ์มีจุดตรึงที่ไม่ซ้ำกัน และยิ่งกว่านั้นทุกลำดับ Picard จะลู่เข้าสู่จุดตรึง

ถ้าพิจารณาแนวคิดของตัวดำเนินการ Picard ทุก ๆ การหดตัวของ □ หรือ □ - contraction บนปริภูมิที่สมบูรณ์ คือตัวดำเนินการ Picard การศึกษาตัวดำเนินการ Picard นั้นคล้ายคลึงกับการศึกษาการส่งแบบหดตัวในการกำหนดปริภูมิเมตริกง่ายที่จะเห็นว่าการส่งแบบหดตัวเกือบทั้งหมดบนปริภูมิเมตริกทั้งหมดเป็นตัวดำเนินการ Picard ทั้งนี้ขอเสนอคลาสของตัวดำเนินการ Picard-Jungck สำหรับการจับคู่บนปริภูมิเมตริกทั่วไปในแง่ของ Branciari โดยใช้โดยคำนึงถึงฟังก์ชันการจำลอง C_G หรือ C_G-simulation functions นอกจากนี้ยังได้ผลลัพธ์ใหม่ๆ สำหรับการมีอยู่ของการดำเนินการดังกล่าวสำหรับการจับคู่ตนเองในการกำหนดปริภูมิเมตริก นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างที่น่าสนใจเพื่อแสดงความสามารถในการใช้งานของผลลัพธ์ ผลลัพธ์ที่พิสูจน์แล้วในที่นี้สั้น และสรุปผลลัพธ์ที่เป็นที่รู้จักมากมายที่มีอยู่ในวรรณกรรม สำหรับฟังก์ชันการจำลองแบบต่าง ๆ ซึ่งสามารถได้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจมากในการเริ่มต้น ทั้งนี้มีบทนิยาม สัญลักษณ์ และผลลัพธ์ที่จะนำไปใช้

บทนิยาม 2.22 กำหนดให้ X เป็นเซตว่าง และกำหนดให้ $d: X\times X \to [0,\infty)$ เป็นการส่งโดยที่สำหรับทุก $x, y\in X$ และสำหรับจุดที่แตกต่างทั้งหมด $u,v\in X$ ทุกจุดที่แตกต่างกันของ x และ y

(d_1) $d(x,y)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=y$

(d_2) $d(x,y)=d(y,x)$

(d_3) $d(x,y)\le d(x,u)+d(u,v)+d(v,y)$

จากนั้นจะเรียก d ว่าเป็นเมตริกทั่วไปบน X และ (X,d) เรียกว่าปริภูมิเมตริกทั่วไป กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกทั่วไป ให้ $\{x_n\}\subset X$ เป็นลำดับ และ $x\in X$ แล้วเรากล่าวว่า

(a) $\{x_n\}$ ลู่เข้า x (กำหนดโดย $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$

(b) $\{x_n\}$ เป็นโคชี ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,x_m)=0$

(c) (X,d) เป็นเมตริกบริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อทุกลำดับโคชีใน X ลู่เข้าบางจุดใน X

(d) การส่ง $T: X\to X$ ต่อเนื่องที่ $x\in X$ ถ้าสำหรับทุก $V\in\tau$ อยู่ใน T_x และค่า $U\in\tau$ อยู่ใน x โดยที่ $TU\subset V$ โดยที่ τ คือโทโพโลยีบน X ที่เกิดจากเมตริกทั่วไป d นั่นคือ

$$\tau=\{U\subset X: \forall x\in U, \exists B\in\beta,\ x\in B\subset U\},$$

$$\beta=\{B(x,r): x\in X,\ \forall_r>0\},$$

$$B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$$

ถ้า T ต่อเนื่องทุกจุดที่ $x\in X$

สังเกตว่า T จะต่อเนื่องกันก็ต่อเมื่อมันต่อเนื่องกันตามลำดับเท่านั้น เช่น $\lim_{n\to\infty} d(Tx_n,Tx)=0$ สำหรับลำดับใด ๆ $\{x_n\}\subset X$ ด้วย $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$ ถ้า d เป็นเมตริกทั่วไปบน X

จึงไม่ต่อเนื่องกันในแต่ละพิกัด ซึ่งกำหนดฟังก์ชัน C−class ดังนี้:

บทนิยาม 2.23 การส่งผ่าน $G:[0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ เรียกว่าคลาสฟังก์ชัน C หรือฟังก์ชัน C-class ถ้าต่อเนื่องโดย $G(s,t) \le s$ สำหรับทุก $s,t \in [0,+\infty)$

บทนิยาม 2.24 การส่งผ่าน $G:[0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ มีคุณสมบัติ C_G ถ้ามีค่า C_G โดยที่

$(C_G 1)$ $G(s,t) > C_G$ แล้ว $s > t$

$(C_G 2)$ $G(t,t) \le C_G$ สำหรับทุก $t \in [0,+\infty)$

สำหรับบางตัวอย่างของคลาสฟังก์ชัน C มีคุณสมบัติ C_G ดังนี้

(a) $G(s,t) = s - t,\ C_G = r,\ r = [0,+\infty)$

(b) $G(s,t) = s - \dfrac{(2+t)t}{1+t},\ C_G = 0$

(c) $G(s,t) = \dfrac{s}{1+kt}, k \ge 1,\ C_G = \dfrac{r}{1+k},\ r \ge 2$

บทนิยาม 2.25 เรานิยามให้ Z_G เป็นตระกูลของการจำลอง C_G ทั้งหมดฟังก์ชัน $\zeta:[0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ ดังต่อไปนี้

$(Z_G 1)$ $\zeta(t,s) < G(s,t)$ สำหรับทุก $t,s > 0$ โดยที่ $G:[0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ คือ คลาสฟังก์ชัน C

$(Z_G 2)$ ถ้า $\{t_n\},\{s_n\}$ คือลำดับใน $(0,+\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ และ $t_n < s_n$ แล้ว $\limsup\limits_{n\to\infty} \zeta(t_n,s_n) < C_G$

สำหรับบางตัวอย่างของการจำลองฟังก์ชัน และฟังก์ชันการจำลอง C_G ดังนี้

(d) $\zeta(t,s) = \dfrac{s}{s+1} - t$ สำหรับทุก $t,s \ge 0$

(e) $\zeta(t,s) = s - \psi(s) - t$ สำหรับทุก $t,s \ge 0$ โดยที่ $\psi:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ เป็นฟังก์ชันกึ่งต่อเนื่องล่าง และ $\psi(t) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $t = 0$

เมื่อไม่นานมานี้ ในปี ค.ศ. 2015 Khojasteh และคณะเสนอแนวคิดของฟังก์ชันการจำลองเพื่อรวมผลลัพธ์ที่มีจุดตรึงหลายจุดในบทความนี้ตรวจสอบการมีอยู่และความเป็นเอกลักษณ์ของจุดตรึงของการส่งบางอย่างผ่านฟังก์ชันการจำลองในปริภูมิที่บริบูรณ์ของการเรียงลำดับบางส่วนทั้งหมดในปริภูมิเมตริกยังจะต้องระบุด้วยว่าผลลัพธ์หลายอย่างในวรรณกรรมสามารถได้มาจากผลลัพธ์หลัก

บทนิยาม 2.26 ฟังก์ชันการจำลอง คือการส่ง $\zeta:[0,+\infty)\times[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ มีเงื่อนไขดังนี้

(ζ_1) $\zeta(0,0) = 0$

(ζ_2) $\zeta(t,s) < s - t$ สำหรับทุก $t,s > 0$

(ζ_3) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n > 0$ แล้ว $\limsup\limits_{n\to\infty} \zeta(t_n,s_n) < 0$

กำหนดให้ □ แทนตระกูลของฟังก์ชันการจำลองทั้งหมด $\zeta:[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to$□ เนื่องจากสัจพจน์ (ζ_2) เรามี (d) $\zeta(t,t)$ สำหรับทุก $t>0$

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนดให้ $\phi_i:[0,\infty)\times[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องกับ $\phi_i(t)=0$ ก็ต่อเมื่อ $t=0$ สำหรับ $i=1,2,3,4,5,6$ นิยามการส่ง $\zeta_i:[0,\infty)\times[0,\infty)\to$□ ดังนี้

(i) $\zeta_1(t,s)=\phi_1(s)-\phi_2(t)$ สำหรับทุก $t,s\in[0,\infty)$ โดยที่ $\phi_1(t)<t\le\phi_2(t)$ สำหรับทุก $t>0$

(ii) $\zeta_2(t,s)=s-\dfrac{f(t,s)}{g(t,s)}t$ สำหรับทุก $t,s\in[0,\infty)$ โดยที่ $f,g:[0,\infty)^2\to[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสองฟังก์ชันโดยที่ $f(t,s)>g(t,s)$ สำหรับทุก $t,s>0$

(iii) $\zeta_3(t,s)=s-\phi_3(s)-t$ สำหรับทุก $t,s\in[0,\infty)$

(iv) ถ้า $\psi=[0,\infty)\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $\limsup_{t\to r^+}\psi(t)<1$ สำหรับทุก $r>0$ และนิยามโดย $\zeta_4(t,s)=s\psi(s)-t$ สำหรับทุก $t,s\in[0,\infty)$

(v) ถ้า $\eta:[0,\infty)\to[0,\infty)$ เป็นการส่งแบบกึ่งต่อเนื่องด้านบนเพื่อให้ $\eta(t)<t$ สำหรับทุก $t>0$ และ $\eta(0)=0$ และนิยามโดย $\zeta_5(t,s)=\eta(s)-t$ สำหรับทุก $t,s\in[0,\infty)$

(vi) ถ้า $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $\int_0^{\varepsilon}\phi(u)du$ มีค่า และ $\int_0^{\varepsilon}\phi(u)du>\varepsilon$ สำหรับทุก $\varepsilon>0$ และนิยามโดย $\zeta_6(t,s)=s-\int_0^{t}\phi(u)du$ สำหรับทุก $t,s\in[0,\infty)$ เป็นที่ชัดเจนว่าแต่ละฟังก์ชัน $\zeta_i(i=1,2,3,4,5,6)$ สร้างฟังก์ชันการจำลอง

สมมติว่า (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก T คือการส่งผ่านตัวเองบน X และ $\zeta\in$□ โดยที่ T คือการหดตัว T หรือ การหดตัวแบบ □ (□-contraction) ของ ζ ถ้า

$$\zeta(d(Tx,Ty),d(x,y))\ge 0 \text{ สำหรับทุก } x,y\in X$$

และ (ζ_2)

$$q(Tx,Ty)\ne q(x,y) \text{ สำหรับทุก } x,y\in X \text{ ที่ต่างกัน}$$

ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า T ไม่สามารถมีมิติเท่ากัน เมื่อใดก็ตามที่ T คือการหดตัวของ □ กล่าวอีกนัยหนึ่งถ้าการหดตัวของ □ หรือ□-contraction ซึ่ง T ในปริภูมิเมตริกมีจุดตายตัวดังนั้นจึงจำเป็นต้องไม่ซ้ำกัน

ทฤษฎีบท 2.6 การหดตัว □ ปริภูมิบนพื้นที่เมตริกที่สมบูรณ์มีจุดคงตรึงที่ไม่เหมือนใครทุกลำดับ Picard ลู่เข้าที่จุดตรึงเดียว

ให้ ψ เป็นตระกูลของฟังก์ชัน $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ มีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(i) ψ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

(ii) มี $k_0\in\mathbb{N}$ และ $a\in(0,1)$ และอนุกรมการลู่ข้าวของพจน์ที่ไม่เป็นลบ $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ โดยที่

$$\psi^{k+1}(t)\le a\psi^{k}(t)+v_k$$

สำหรับ $k\ge k_0$ และ $t\in\mathbb{R}^+$

ในวรรณกรรมเรียกว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชัน Bianchini-Grandolfi gauge functions หรือ ฟังก์ชันเปรียบเทียบ(comparison functions)

บทตั้ง 2.2 ถ้า $\psi\in\Psi$ แล้วมีเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $(\psi^{n}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ ลู่เข้าสู่ 0 โดยที่ $n\to\infty$ สำหรับทุก $t\in\mathbb{R}^+$

(ii) $\psi(t)<t$ สำหรับทุก $t\in\mathbb{R}^+$

(iii) ψ ต่อเนื่องที่ 0

(iv) อนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^{k}(t)$ ลู่เข้าสำหรับทุก $t\in\mathbb{R}^+$

เมื่อเร็วๆ นี้ Samet และคณะ ได้แนะนำการการส่งผ่านตัวเองแบบหดตัวแบบใหม่เพื่อรวมผลลัพธ์ที่มีอยู่หลายรายการในวรรณกรรมด้วยฟังก์ชันเสริม

บทนิยาม 2.27 กำหนดให้ $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ ส่งผ่านตัวเอง $T:X\to X$ เรียกว่า α-admissible ถ้ามีเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\alpha(x,y)\ge 1\Rightarrow\alpha(Tx,Ty)\ge 1 \qquad \text{สำหรับ } x,y\in X$$

บทนิยาม 2.28 กำหนดให้ T ส่งผ่านตัวเองบนปริภูมิเมตริก (X,d) แล้วเรียก T ว่าการส่งแบบหดตัว $\alpha-\psi$ ถ้ามีการส่งสองฟังก์ชันแบบ auxiliary mapping $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ และ $\psi\in\Psi$ โดยที่

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty)\le\psi(d(x,y)) \qquad \text{สำหรับ } x,y\in X$$

เห็นได้ชัดว่าการส่งแบบหดตัวใด ๆ นั่นคือการส่งที่เป็นไปตามการหดตัวของบานาค นั้นเป็นการส่งแบบหดตัว $\alpha-\psi$ ด้วย $\alpha(x,y)$ สำหรับ $x,y\in X$ และ $\psi(t)=kt,\ k\in(0,1)$

ทฤษฎีบท 2.7 กำหนดให้ $T: X \to X$ เป็นการส่งแบบหดตัว $\alpha-\psi$ โดยที่ (X,d) คือ ปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ สมมุติให้

(i) T คือ α-admissible

(ii) ค่า $x_0 \in X$ โดยที่ $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$

(iii) T ต่อเนื่อง

$(iii)'$ ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X โดยที่ $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก n และ $x_n \to x \in X$ โดยที่ $n \to \infty$ แล้ว $\alpha(x_n, x) \geq 1$ สำหรับทุก n แล้ว มีค่า $u \in X$ โดยที่ $Tu = u$

ทั้งนี้แนวคิดพื้นฐาน คำจำกัดความ และผลลัพธ์พื้นฐานโดยเริ่มจากนิยามความของฟังก์ชันการจำลอง ซึ่งดำเนินการดังนี้

บทนิยาม 2.27 ฟังก์ชันการจำลอง คือการส่ง $\zeta : [0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ มีเงื่อนไขดังนี้

(ζ_1) $\zeta(0,0) = 0$

(ζ_2) $\zeta(t,s) < s-t$ สำหรับทุก $t, s > 0$

(ζ_3) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$

โรลแดนและคณะ ได้แก้ไขบทนิยม 2.27 เพื่อขยายคลาสของฟังก์ชันการจำลองโดยการทำให้เงื่อนไขคมชัดขึ้น (ζ_3) ดังนี้

(ζ'_3) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ และ $t_n < s_n$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$

ดูตัวอย่างฟังก์ชันการจำลองได้ใน Khojasteh, Shukla & Radennovic แสดงโดย $\mathcal{Z}$ คลาสของฟังก์ชันการจำลองทั้งหมด

Roldán & Samet ได้ขยายแนวคิดของฟังก์ชันการจำลองตามด้านล่าง

บทนิยาม 2.28 ฟังก์ชัน $\xi : [0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ เรียกว่าว่าเป็นฟังก์ชันการจำลองแบบขยายหากมีเงื่อนไขต่อไปนี้:

$(\xi 1)$ $\xi(t,s) < s-t$ สำหรับทุก $t, s > 0$

(ζ_2) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = l > 0$ และ $s_n > l,\ n \in \mathbb{N}_0$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$

$(\xi 3)$ สำหรับลำดับใด ๆ $\{t_n\}$ ใน $(0,\infty)$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} t_n = l \geq 0$ และ $\xi(t_n, l) \geq 0,\ n \in \mathbb{N}_0$ แล้ว $l = 0$

บทนิยาม 2.29 ฟังก์ชันต่อเนื่อง $Q:[0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ เรียกว่าฟังก์ชันคลาส C ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้ (สำหรับทุก $t,s \in [0,\infty)$)

(i) $Q(s,t) \le s$

(ii) $Q(s,t) = s$ โดยที่ $t=0$ หรือ $s=0$

ตระกูลของฟังก์ชัน C-class ทั้งหมดจะแสดงด้วย C

บทนิยาม 2.30 ฟังก์ชัน $Q:[0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ มีคุณสมบัติ C_Q มีค่าคงที่ $C_Q \ge 0$ โดยที่

(Q1) $Q(s,t) > C_Q$ โดยที่ $s > t$

(Q2) $Q(t,t) \le C_Q$ สำหรับทุก $t \in [0,\infty)$

Liu และคณะได้กำหนดฟังก์ชันการจำลอง C_Q ไว้ดังนี้

บทนิยาม 2.31 ฟังก์ชัน $\zeta^*:[0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ เรียกว่าฟังก์ชันการจำลอง C_Q มีเงื่อนไขต่อไปนี้

(ξ^*1) $\xi(0,0)=0$

(ξ^*2) $\xi^*(t,s) < Q(s,t)$ สำหรับทุก $t,s>0$ โดยที่ $Q \in C$ และมีคุณสมบัติ C_Q

(ξ^*3) ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ และ $t_n < s_n$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \zeta^*(t_n,s_n) < C_Q$

สำหรับตัวอย่างพื้นฐานของฟังก์ชันการจำลอง C_Q แสดงโดย $\Box_Q$ ตระกูลของฟังก์ชันการจำลอง C_Q ทั้งหมด

จันดา และคณะ ได้ขยายแนวคิดของภายใต้ฟังก์ชันการจำลอง C_Q

บทนิยาม 2.32 ฟังก์ชัน $\theta:[0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ เรียกว่าฟังก์ชันการจำลอง C_Q มีเงื่อนไขต่อไปนี้

$(\theta 1)$ $\theta(t,s) < Q(s,t)$ สำหรับทุก $t,s>0$ โดยที่ $Q \in C$ และมีคุณสมบัติ C_Q

$(\theta 2)$ ถ้า $\{t_n\}$ และ $\{s_n\}$ ลู่เข้าใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = l > 0$ และ $s_n > l, n \in \mathbb{N}_0$ แล้ว $\limsup_{n\to\infty} \theta(t_n,s_n) < C_Q$

$(\theta 3)$ สำหรับลำดับใด ๆ $\{t_n\}$ ใน $(0,\infty)$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} t_n = l \ge 0$ และ $\theta(t_n,l) \ge C_Q$, $n \in \mathbb{N}_0$ แล้ว $l=0$

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $\theta:[0,\infty)^2 \to \square$ เป็นฟังก์ชันดังนี้

$$\theta(t,s)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{2} & ;s=0\\ \dfrac{ks}{1+t} & ;s>0\end{cases}$$

สำหรับทุก $t,s\in[0,\infty), k\in[0,1)$ และกำหนดให้ $\mathrm{Q}(s,t)=\dfrac{s}{1+t}$ กับ $C_{\mathrm{Q}}=1$ แล้ว $\theta\in\varepsilon(\square,\mathrm{Q})$ แต่ θ ไม่เท่ากับ $\square,\square_{\mathrm{Q}}$ และ $\varepsilon_{\square}$ และกำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่าง และใช้แนวคิดต่อไปนี้:

(σ1) $Fix(T)=\{x\in X : Tx=x\}$

(σ2) $Pcoin(T,S)=\{x\in X : x=Tv=Sv\}$ สำหรับบาง $v\in X$

(σ3) $Com(T,S)=\{x\in X : x=Tx=Sx\}$

(σ4) $\square_{\psi}=\{x\in X : \psi(x)=0$ โดยที่ $\psi : X\to[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน $\}$

ต่อไปขอนำเสนอแนวความคิดเรื่อง ψ-fixed point ซึ่งดำเนินการดังนี้

บทนิยาม 2.33 กำหนดให้ T ส่งผ่านตัวเองบน X และ $\psi : X\to[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชัน และมีสมาชิก $x\in X$ เป็น ψ-fixed point ของ T ก็ต่อเมื่อ เป็นจุดตรึงของ T และ $\psi(x)=0$ นั่นคือ $x\in Fix(T)\cap\square_{\psi}$

กำหนดให้ T และ S ส่งผ่านตัวเองสองฟังก์ชันบน X

(σ1) ลำดับ $\{x_n\}\subseteq X$ เรียกว่า Picard-Jungck sequence ของ T และ S บนฐานของ $\{x_0\}$ ถ้า $Sx_{n+1}=Tx_n$ สำหรับทุก $n\in\square_0$

(σ1) T และ S เรียกว่า weakly compatible นั่นคือ $TSx=STx$ สำหรับทุก $x\in X$ โดยที่ $Tx=Sx$

บทตั้ง 2.3 กำหนดให้ T และ S เป็นส่งผ่านตัวเองสองฟังก์ชัน weakly compatible บน X ถ้า T และ S มีจุดทับกันสนิท (unique point of coincidence) u แล้ว u เป็นจุดตรึงร่วม (unique common fixed point) ของ T และ S

กำหนดให้ F เป็นเซตของฟังก์ชันทั้งหมด $F:[0,\infty)^3\to[0,\infty)$ ตามเงื่อนไขต่อไปนี้สำหรับ $a,b,c\in[0,\infty)$ ทั้งหมด

($F1$) $\max\{a,b\}\le F(a,b,c)$

($F1$) $F(a,0,0)=a$

($F1$) F ต่อเนื่อง

ฟังก์ชันต่อไปนี้ $F:[0,\infty)^3\to[0,\infty)$ เป็นของ F

1. $F(a,b,c)=a+b+c$
2. $F(a,b,c)=\max\{a,b\}+c$
3. $F(a,b,c)=(a+b)(c+1)^n,\ n=0,1,2,...$

บทนิยาม 2.34 กำหนดให้ $\zeta:[0,\infty)\times[0,\infty)\to$ □ เป็นการส่ง แล้วเรียก ζ ว่าฟังชันก์จำลองถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$(\zeta 1):\zeta(0,0)=0;$

$(\zeta 2):\zeta(v,u)<u-v$ สำหรับทุก $u,v>0;$

$(\zeta 3):$ถ้า $\{v_n\},\{u_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n > 0$ แล้ว $\limsup\limits_{n\to\infty}\zeta(v_n,u_n)<0$

บทนิยาม 2.35 ฟังก์ชันการจำลอง คือ การส่ง $\zeta:[0,\infty)\times[0,\infty)\to$ □ ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$(\zeta 1):\zeta(v,u)<u-v,\ u,v>0;$

$(\zeta 2):$ถ้า $\{v_n\},\{u_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n > 0$ และ $v_n<u_n$ แล้ว $\limsup\limits_{n\to\infty}\zeta(v_n,u_n)<0$

บทนิยาม 2.36 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริก, $\Omega:\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}$ เป็นการส่ง และ $\zeta\in$ □ แล้วเรียก Ω ว่าการหดตัวแบบ □ ทั่วไป (generalized □ -contraction) เมื่อเทียบกับ ζ ถ้า

$$\zeta(d(\Omega\omega,\Omega\rho).\Theta(\omega,\rho))\geq 0 \text{ สำหรับทุก } \omega,\rho\in\mathrm{Y},$$

โดยที่

$$\Theta(\omega,\rho)=\max\left\{d(\omega,\rho),d(\omega,\Omega\omega),d(\rho,\Omega\rho),\frac{d(\omega,\Omega\rho)+d(\rho,\Omega\omega)}{2}\right\}$$

บทนิยาม 2.37 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริก, $\Omega:\mathrm{Y}\to\mathrm{Y}$ เป็นการส่ง และ $\zeta\in$ □ แล้วเรียก Ω ว่าการหดตัวแบบ □ แบบ Suzuki ทั่วไป (generalized Suzuki type □ -contraction) เมื่อเทียบกับ ζ ถ้า

$$\frac{1}{2}(d(\omega,\Omega\omega)<d(\omega,\rho)\Rightarrow\zeta(d(\Omega\omega,\Omega\rho),\Theta(\omega,\rho))\geq 0, \text{ สำหรับทุกความแตกต่าง } \omega,\rho\in\mathrm{Y},$$

โดยที่

$$\Theta(\omega,\rho)=\max\left\{d(\omega,\rho),d(\omega,\Omega\omega),d(\rho,\Omega\rho),\frac{d(\omega,\Omega\rho)+d(\rho,\Omega\omega)}{2}\right\}$$

บทนิยาม 2.38 การส่ง $G:[0,\infty)^2 \to R$ มีคุณสมบัติ C_G ถ้ามีค่า $C_G \geq 0$ โดยที่

(G_1): $G(u,v) > C_G$ โดยที่ $u > v$

(G_2): $G(u,v) \leq C_G$ สำหรับทุก $v \in [0,\infty)$

บทนิยาม 2.39 ฟังก์ชันการจำลอง C_G คือการส่ง $G:[0,\infty)\times[0,\infty) \to □$ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

(i): $\zeta(v,u) < G(u,v)$ สำหรับทุก $u,v > 0$ โดยที่ $G:[0,\infty)[0,\infty)\times[0,\infty) \to □$ คือฟังก์ชันคลาส C

(ii): ถ้า $\{v_n\},\{u_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,\infty)$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n > 0$ และ $v_n < u_n$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} sup\zeta(v_n,u_n) < C_G$

บทตั้ง 2.3 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริก และกำหนดให้ $\{\omega_n\}$ เป็นลำดับใน Y โดยที่

$$\lim_{n\to\infty} d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}) = 0$$

ถ้า $\{x_n\}$ ไม่เป็นลำดับโคชี ใน Y แล้วมีค่า ò>0 และสองลับดับ $\omega_{m(k)}$ และ $\omega_{n(k)}$ ของจำนวนเต็มบวกโดยที่ $\omega_{n(k)} > \omega_{m(k)} > k$ และลำดับต่อไปลู่เข้าสู่ ò$^+$ เมื่อ $k \to \infty$

$$d(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)}), d(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)+1}), d(\omega_{m(k)-1},\omega_{n(k)}),$$
$$d(\omega_{m(k)-1},\omega_{n(k)+1}), d(\omega_{m(k)+1},\omega_{n(k)+1})$$

สำหรับเซตไม่ว่าง Y กำหนดให้ P(Y) หมายถึงเซตกำลังสอง ถ้า (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริก แล้วกำหนดให้ $N(Y) = P(Y) - \{\varnothing\}$,

$CB(Y) = \{A \in N(Y) : A$ คือ เซตปิดและมีขอบเขต$\}$

$K(Y) = \{A \in N(Y) : A$ คือ compact$\}$

บทนิยาม 2.39 กำหนดให้ Y เป็นเซตไม่ว่าง $\Omega : Y \to N(Y)$ และ $\alpha : Y \times Y \to [0,\infty)$ เป็นการส่งสองฟังก์ชัน แล้วเรียก Ω ว่าเป็น α-admissible เมื่อสำหรับทุก $\omega \in Y$ และ $\rho \in \Omega\omega$

$$\alpha(\omega,\rho) \geq 1 \Rightarrow \alpha(\rho,\eta) \geq 1 \text{ สำหรับทุก } \eta \in \Omega\rho$$

บทนิยาม 2.40 กำหนดให้ Y เป็นเซตไม่ว่าง $\Omega : Y \to N(Y)$ และ $\alpha : Y \times Y \to [0,\infty)$ เป็นการส่งสองฟังก์ชัน แล้วเรียก Ω ว่าเป็นสามเหลี่ยม α-admissible ถ้า Ω ว่าเป็น α-admissible

$$\alpha(\omega,\rho) \geq 1 \text{ และ } \alpha(\rho,\eta) \geq 1$$
$$\Rightarrow \alpha(\omega,\eta) \geq 1 \text{ สำหรับทุก } \eta \in \Omega\rho$$

บทตั้ง 2.4 กำหนดให้ $\Omega : Y \to N(Y)$ คือการส่ง สามเหลี่ยม α-admissible สมมุติให้ ค่าของ $\omega_0 \in Y$ และ $\omega_1 \in \Omega\omega_0$ โดยที่ $\alpha(\omega_0,\omega_1) \geq 1$ สำหรับลำดับ $\{\omega_n\}$ โดยที่ $\omega_{n+1} \in \Omega\omega_n$ ซึ่งมี $\alpha(\omega_n,\omega_m) \geq 1$ สำหรับทุก $m,n \in □$ โดยที่ $n < m$

บทนิยาม 2.41 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\alpha:\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}\to[0,\infty)$ และ $\Omega:\mathrm{Y}\to\mathrm{K}(\mathrm{Y})$ เป็นการส่ง แล้วเรียก Ω ว่าเป็นการส่งแบบหลายค่า α-continuous บน $(\mathrm{K}(\mathrm{Y}),\mathrm{H})$ ถ้าสำหรับทุกลำดับ $\{\omega_n\}$ เมื่อ $\omega_n\to\omega\in\mathrm{Y}$ โดยที่ $n\to\infty$ และ $\alpha(\omega_n,\omega_{n+1})\geq 1$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ เรามี $\Omega\omega_n\to\Omega\omega$ โดยที่ $n\to\infty$ นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} d(\omega_n,\omega)=0 \text{ และ } \alpha(\omega_n,\omega_{n+1})\geq 1$$

สำหรับทุก $n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{H}(\Omega\omega_n,\Omega\omega)=0$

บทนิยาม 2.42 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $\alpha:\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}\to[0,\infty)$ และ ปริภูมิ (Y,d) คือ α-complete ก็ต่อเมื่อทุกลำดับโคชี $\{\omega_n\}$ ซึ่ง $\alpha(\omega_n,\omega_{n+1})\geq 1$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ ลู่เข้าสู่ Y