บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ได้แนะนำแนวคิดของการหดตัวของ Z แบบ α -admissible ทั่วไปบนปริภูมิเมตริกใหม่โดยใช้ฟังก์ชันการจำลองร่วมกับการส่งแบบที่ยอมรับได้ในปริภูมิของเมตริก นอกจากนี้ยังมีความเป็นเอกลักษณ์ของตัวดำเนินการ Picard-Jungck สำหรับการจับคู่โดยใช้ฟังก์ชันการจำลอง C_G ในปริภูมิเมตริกทั่วไปซึ่งแนวคิดของการหดตัวของ Z แบบ α -admissible ด้วยฟังก์ชันการจำลองและได้ใช้แนวคิดนี้เพื่อกำหนดผลลัพธ์ของ $\mathrm{C(Q,W)}$ และ $\mathrm{CF(Q,W)}$ ใน $\mathrm{C(H,\varpi)}$ และมีตัวอย่างประกอบในงานวิจัยซึ่งเป็นการขยายงานของ Karapinar

นอกจากนี้ยังมีทฤษฎีบทพื้นฐานเพื่อกำหนดความบังเอิญ และผลลัพธ์จุดคงตรึงทั่วไปสำหรับการหดตัว Z ที่ยอมรับได้ เราพิสูจน์ผลลัพธ์โดยกำหนดการหดตัวของ Z ที่แก้ไขแล้วเทียบกับ Λ ซึ่งเป็นลักษณะทั่วไปของแนวทางของการหดตัวของ Z

ทั้งนี้มีการนำเสนอการส่งฟังก์ชันในตัวเอง เรารวบรวม แนวคิดพื้นฐาน บทนิยาม ทฤษฎี และผลลัพธ์พื้นฐานโดยเริ่มจากนิยามของฟังก์ชันการจำลองซึ่งดำเนินการดังนี้

3.1 ทฤษฎีบทจุดคงที่สำหรับการส่งค่าเดียว

จุด x ที่เป็นของ X ถือว่าเป็นจุดตรึง (fixed point) ของการส่งผ่านตัวเอง (self-map) T บน X ถ้า $Tx = x$ ในปี ค.ศ. 1922 Banach นักคณิตศาสตร์ชาวโปแลนด์ที่มีชื่อเสียง และเป็นหนึ่งในผู้ก่อตั้ง Functional Analysis ได้กำหนด "Principle of Contraction Mapping" ซึ่งใช้กันอย่างแพร่หลายเพื่อพิสูจน์การมีอยู่ และเอกลักษณ์ของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ และปริพันธ์ หลักการส่งแบบหดตัวระบุไว้ในทฤษฎีบท 3.1 ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 (Banach, 1922) กำหนดให้ (X,d) คือ ปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ และ T เป็นการจับคู่ของ X ในตัวเองซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขการหดตัวนั่นคือมีค่าคงที่ $a \in [0,1)$ โดยที่

$$d(Tx,Ty) \le ad(x,y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะ $x \in X$

ทฤษฎีบท 3.2 (Kannan, 1969) กำหนดให้ (X,d) คือ ปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ และ T เป็นการการส่งแบบ Kannan บน X และมีค่าคงที่ $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ โดยที่

$$d(Tx,Ty) \le b[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะ $x \in X$

ในปีต่อมาในปี ค.ศ. 1972 Chatterjea นำเสนอแนวคิดการการส่งแบบ Chatterjea และเขาได้พิสูจน์ผลลัพธ์ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3 (Chatterjea, 1972) กำหนดให้ (X,d) คือ ปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ และ T เป็นการการส่ง Chatterjea บน X และมีค่าคงที่ $c \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ โดยที่

$$d(Tx,Ty) \le c[d(x,Ty)+d(y,Tx)]$$

สำหรับทุก $x,y \in X$ แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะ $x \in X$

ในปีต่อมาในปี ค.ศ. 1972 Zamfirescu ได้รวมแนวคิดของการหดตัว การส่ง Kannan & Chatterjea เข้ากับการส่งแบบ Zamfirescu และเขาได้พิสูจน์ว่าการส่งดังกล่าวมีจุดตรึงที่ไม่เหมือนใครดังนี้

ทฤษฎีบท 3.4 (Zamfirescu, 1972) กำหนดให้ (X,d) คือ ปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ และ T เป็นการการส่งแบบ Zamfirescu บน X และมีจำนวนจริง a,b และ c โดยที่ $a \in [0,1), b \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ และ $c \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ สำหรับทุก $x,y \in X$ เป็นไปตามเงื่อนไขอย่างน้อยหนึ่งข้อดังนี้

1. $d(Tx,Ty) \le ad(x,y)$
2. $d(Tx,Ty) \le b[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$
3. $d(Tx,Ty) \le c[d(x,Ty)+d(y,Tx)]$

แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะ $x \in X$

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ X และ $T: A\cup B \to A\cup B$ แล้วเรียก T ว่าการส่งวัฏจักร (cyclic map) ก็ต่อเมื่อ $T(A)\subseteq B$ และ $T(B)\subseteq A$ ในปีค.ศ. 1972 Kirk, Srinivasan และ Veeramani ได้ขยายแนวคิดของการส่งแบบหดตัวของบานาคไปยังการส่งแบบหดตัวตามวัฏจักรดังนี้

ทฤษฎีบท 3.5 (Kirk, Srinivasan & Veeramani, 2003) กำหนดให้ A และ B B เป็นเซตย่อยแบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ (X,d) และการส่งวัฏจักร T เป็นไปตามเงื่อนไขของการส่งแบบหดตัว แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะใน $A\cap B$

ต่อมาในปีค.ศ. 2010 Karapinar & Erhan ได้ให้ทฤษฎีบทจุดตรึงของการส่งแบบวัฏจักรบนปริภูมิเมตริกดังนี้

ทฤษฎีบท 3.6 (Karapinar & Erhan, 2010) กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยแบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ (X,d) และการส่งวัฏจักร T บน X เป็นไปตามเงื่อนไขของการส่งแบบ Kannan แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะใน $A\cap B$

ต่อมาในปีค.ศ. 2015 แนวความคิดของปริภูมิ quasi-b-metric ที่คลาดเคลื่อนซึ่งเป็นลักษณะทั่วไปของปริภูมิเสมือนเมตริกb และปริภูมิที่คลาดเคลื่อนแบบเมตริก b ได้รับการแนะนำโดย Klin-eam & Suanoom ดังนี้

บทนิยาม 3.1 (Klin-eam & Suanoom, 2015) กำหนดให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง (X,d,s) เรียกว่าปริภูมิเสมือนเมตริกb (dqb-metric space) หากการส่ง $d: X \times X \to [0,\infty)$ ด้วยค่าคงที่ $s \geq 1$ เป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$(D1)$ $d(x,y) = d(y,x) = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in X$

$(D2)$ $d(x,y) \leq s[d(x,z) + d(z,y)]$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

เรียกจำนวน s ว่าสัมประสิทธิ์ของ (X,d,s)

เป็นที่ชัดเจนว่าปริภูมิเมติก, ปริภูมิเมตริกb (b-metric space), ปริภูมิเมตริก qb (qb-metric space) และปริภูมิเมตริกdb (db-metric space) ก็เป็นปริภูมิเมตริกdqb (dqb-metric space) ด้วยเช่นกันซึ่งตัวอย่างต่อไปนี้แสดงปริภูมิเมตริก dqb กับเมตริก dqb

ตัวอย่าง 3.1 (Klin-eam & Suanoom, 2015) กำหนดให้ $X = \square$ และกำหนดให้

$$d(x,y) = |x-y|^2 + \frac{|x|}{m} + \frac{|y|}{n}$$

โดยที่ $m, n \in \square$ เมื่อ $m \neq n$ แล้ว (X,d,s) คือ เป็นปริภูมิกึ่งบีเมตริกคลาดเคลื่อนโดยมีค่าสัมประสิทธิ์ $s = 2$

ตัวอย่าง 3.2 (Klin-eam & Suanoom, 2015) กำหนดให้ $X = \square$ และกำหนดให้

$$d(x,y) = |x-y|^2 + 3|x|^2 + 2|y|^2$$

แล้ว (X,d,s) คือ เป็นปริภูมิกึ่งบีเมตริกคลาดเคลื่อนโดยมีค่าสัมประสิทธิ์ $s = 2$

ต่อมาในปีค.ศ. 2015 Klin-eam & Suanoom ได้ขยายแนวคิดเรื่องการหดตัวของ Banach และการส่งแบบ Kannan บนปริภูมิเมตริกเป็นการส่งแบบวัฏจักรบนปริภูมิเมตริก dqb และได้รับจุดตรึงในทฤษฎีบท 3.7 และ 3.8 ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 3.7 (Klin-eam & Suanoom, 2015) กำหนดให้ A และ B เซตย่อยแบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ (X,d,s) สมมุติให้ T คือการส่งแบบหดตัวแบบวัฏจักรบานาค (Cyclic- Banach mapping) มีค่าคงที่ $a \in [0,1)$ กับ $Sa \leq 1$ โดยที่

$$d(Tx,Ty) \leq ad(x,y)$$

สำหรับทุก $x \in A,\ y \in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะใน $A \cap B$

ทฤษฎีบท 3.8 (Klin-eam & Suanoom, 2015) กำหนดให้ A และ B เซตย่อยแบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ (X,d,s) สมมุติให้ T คือการส่งแบบวัฏจักรแบบ Kannan (Cyclic- Kannan mapping) มีค่าคงที่ $b\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ กับ $Sa\le\frac{1}{2}$ โดยที่

$$d(Tx,Ty)\le b[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$$

สำหรับทุก $x\in A,\ y\in B$ แล้ว T จะมีจุดตรึงเฉพาะใน $A\cap B$

สำหรับตัวอย่าง 3.3 และ 3.4 แสดงวิธีการส่งแบบหดตัวแบบวัฏจักร(cyclic contraction mapping) และการส่งแบบวัฏจักรแบบ Kannan บนปริภูมิเมตริก dqb (dqb-metric space) ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.3 (Klin-eam & Suanoom, 2015) กำหนดให้ $X=[-1,1]$ และนิยามให้เซตของ $T:A\cup B\to A\cup B$ เมื่อ $Tx=-\frac{x}{5}$ สมมุติให้ $A=[-1,0]$ และ $B=[0,1]$ และกำหนดให้ฟังก์ชัน $d:X\times X\to[0,\infty)$ โดย

$$d(x,y)=|x-y|^2+\frac{|x|}{10}+\frac{|y|}{11}$$

จะเห็นได้ว่า d เป็นเมตริก dqb (dqb-metric) บน X และกำหนดให้ $x\in A$ แล้ว $-1\le x\le 0$ จะได้ $0\le-\frac{x}{5}\le\frac{1}{5}$ นั่นคือ $Tx\in B$ ในทางกลับกัน กำหนดให้ $x\in B$ แล้ว $0\le x\le 1$ จะได้ $\frac{1}{5}\le-\frac{x}{5}\le 0$ นั่นคือ $Tx\in A$ ดังนั้น การส่ง T เป็นวัฏจักรบน X เนื่องจาก $T(A)\subset B$ และ $T(B)\subset A$ ต่อไปจะพิจารณา

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= |Tx-Ty|^2+\frac{|Tx|}{10}+\frac{|Ty|}{11}\\
&= \left|-\frac{x}{5}-\left(-\frac{y}{5}\right)\right|^2+\frac{1}{10}\left|-\frac{x}{5}\right|+\frac{1}{11}\left|-\frac{y}{5}\right|\\
&= \frac{1}{25}|x-y|^2+\frac{1}{50}|x|+\frac{1}{55}|y|\\
&= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}|x-y|^2+\frac{1}{10}|x|+\frac{1}{11}|y|\right]\\
&\le \frac{1}{5}\left[|x-y|^2+\frac{1}{10}|x|+\frac{1}{11}|y|\right]\\
&\le ad(x,y)
\end{aligned}$$

สำหรับ $\frac{1}{5}\le a<1$ แสดงให้เห็นว่า T คือการส่งแบบหดตัวแบบวัฏจักร และ 0 คือจุดตรึงเฉพาะของ T

ตัวอย่าง 3.4 (Klin-eam & Suanoom, 2015) กำหนดให้ $X=[-1,1]$ และนิยามให้เซตของ $T:A\cup B\to A\cup B$ เมื่อ $Tx=-\dfrac{x}{7}$ สมมุติให้ $A=[-1,0]$ และ $B=[0,1]$ และกำหนดให้ฟังก์ชัน $d:X\times X\to[0,\infty)$ โดย

$$d(x,y)=|x-y|^2+3|x|+2|y|$$

จะเห็นได้ว่า d เป็นเมตริก dqb (dqb-metric) บน X และกำหนดให้ $x\in A$ แล้ว $-1\le x\le 0$ จะได้ $0\le -\dfrac{x}{7}\le \dfrac{1}{7}$ นั่นคือ $Tx\in B$ ในทางกลับกัน กำหนดให้ $x\in B$ แล้ว $0\le x\le 1$ จะได้ $\dfrac{1}{7}\le -\dfrac{x}{7}\le 0$ นั่นคือ $Tx\in A$ ดังนั้น การส่ง T เป็นวัฏจักรบน X เนื่องจาก $T(A)\subset B$ และ $T(B)\subset A$ ต่อไปจะพิจารณา

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= |Tx-Ty|^2+3|Tx|+2|Ty| \\
&= \left|-\frac{x}{7}-\left(-\frac{y}{7}\right)\right|^2+3\left|-\frac{x}{7}\right|+2\left|-\frac{y}{7}\right| \\
&= \frac{1}{49}|x-y|^2+\frac{3}{7}|x|+\frac{2}{7}|y| \\
&\le \frac{1}{49}\left(|x|-|y|\right)^2+\frac{3}{7}|x|+\frac{2}{7}|y| \\
&\le \frac{2}{49}|x|^2+\frac{2}{49}|y|^2+\frac{3}{7}|x|+\frac{2}{7}|y| \\
&\le \frac{2}{23}\left[\left(\frac{64}{49}|x|^2+\frac{23}{7}|x|\right)+\left(\frac{64}{49}|y|^2++\frac{23}{7}|y|\right)\right] \\
&= \frac{2}{23}\left[\left(\left|x+\frac{1}{7}x\right|^2+3|x|+2\left|\frac{1}{7}x\right|\right)+\left(\left|y+\frac{1}{7}y\right|^2+3|y|+2\left|\frac{1}{7}y\right|\right)\right] \\
&= \frac{2}{23}\left[\left(|x-Tx|^2+3|x|+2|Tx|\right)+\left(|y-Ty|^2+3|y|+2|Ty|\right)\right] \\
&= b[d(x,Tx)+d(y,Ty)]
\end{aligned}$$

สำหรับ $\dfrac{2}{23}\le b<\dfrac{1}{2}$ แสดงให้เห็นว่า T คือการส่งแบบวัฏจักร Kannan (Cyclic- Kannan mapping) และ 0 คือจุดตรึงเฉพาะของ T

3.2 ทฤษฎีบทแบบจุดตายตัวสำหรับการส่งแบบหลายค่า

การศึกษาการมีอยู่ของจุดตรึงไม่เพียงพอต่อการดำเนินการสำหรับการส่งค่าเดียว แต่ยังรวมถึงการส่งแบบหลายค่าด้วย ในปีค.ศ. 1967 Nadler ได้ริเริ่มแนวคิดของการส่งแบบหดตัวหลายค่า ต่อมาในปีค.ศ. 1969 เขาได้ศึกษาการมีอยู่ของจุดตรึงของการส่งหลายค่าแบบหดตัว สำหรับปริภูมิเมตริก (X,d) และกำหนดให้ $CB(X)$ หมายถึงเซตของเซตย่อยของ X ที่เป็นเซตปิด และมีขอบเขต สำหรับ $A,B \in CB(X)$ กำหนดให้ฟังก์ชัน $H: CB(X)\times CB(X) \to \mathbb{R}^+$ เมื่อ

$$H(A,B)=\max\{h(A,B),h(B,A)\}$$

โดยที่

$$h(A,B)=\sup\{d(a,B):a\in A\}$$

และ

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a):a\in A\}$$

สมาชิก $x\in X$ โดยที่ $x\in Tx$ เรียกว่าจุดตรึงของการส่ง T แสดงโดย F_T เซตของจุดตรึงทั้งหมดของ T นั่นคือ $F_T=\{x\in X \mid x\in Tx\}$ ผลลัพธ์ต่อไปนี้ได้รับการพิสูจน์โดย Nadler

ทฤษฎีบท 3.9 (Nadler, 1969) กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X\to CB(X)$ เป็นการส่งแบบการหดตัวหลายค่า (multi-valued contraction mapping) กล่าวคือมีจำนวนจริง $a\in[0,1)$ นั่นคือ

$$H(Tx,Ty)\le ad(x,y)$$

สำหรับทุก $x,y\in X$ แล้ว T เป็นจุดตรึง

ต่อมาในปีค.ศ. 2010 Kaewkhao & Neammanee ได้ขยายการศึกษาการส่งแบบมีค่าเดี่ยวของ Zamfirescu ไปยังกรณีที่มีหลายค่าและได้ศึกษาคุณสมบัติของจุดตรึงดังนี้

ทฤษฎีบท 3.10 (Kaewkhao & Neammanee, 2010) กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ และ $T: X\to CB(X)$ เป็นการส่งหลายค่าแบบ Zamfirescu (multi-valued Zamfirescu mapping) เช่น มีจำนวนจริง $a\in[0,1), b\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ และ $c\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ สำหรับ $x,y\in X$ เป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้อย่างน้อยหนึ่งข้อ

1. $H(Tx,Ty)\le ad(x,y)$
2. $H(Tx,Ty)\le b[d(x,Tx)+d(y,Ty)]$
3. $H(Tx,Ty)\le c[d(x,Ty)+d(y,Tx)]$

แล้ว F_T คือเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และสมบูรณ์

ต่อมาในปีค.ศ. 2011 Kaewkhao & Neammanee ได้ขยายแนวคิดของการส่งแบบมีค่าเดียวแบบวัฏจักรไปยังการส่งแบบหลายค่า กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ X การส่งแบบหลายค่า $T: A \cup B \to CB(X)$ เรียกว่าวัฏจักร (บน A และ B) ถ้า $Tx \subset B$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $Ty \subset A$ สำหรับทุก $y \in B$

ทั้งนี้ยังศึกษาการมีอยู่ของจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่า ซึ่งระบุไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.11 (Kaewkhao & Neammanee, 2011) กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ (X,d) สมมติว่า T เป็นการส่งแบบหลายค่าแบบวนซ้ำโดยมีค่าปิด และขอบเขต สมมติว่ามีค่าคงที่ $a \in [0,1)$ นั่นคือ

$$H(Tx,Ty) \le ad(x,y)$$

สำหรับทุก $x \in A, y \in B$ แล้ว T มีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

จากทฤษฎีบท 3.7 และทฤษฎีบท 3.8 ถ้า (X,d,s) เป็นปริภูมิเมติก dqb ที่สมบูรณ์ (complete dqb-metric space) การส่งในรูปแบบการหดตัวแบบวัฏจักรบานาค (cyclic-Banach contraction) หรือ วัฏจักรแบบ Kannan (cyclic-Kannan) มีจุดตรึงเฉพาะใน $A \cap B$ และจากทฤษฎีบท 3.11 ถ้า (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์ การส่งแบบหลายค่าแบบวัฏจักรมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$ ผลลัพธ์เหล่านี้เป็นแรงบันดาลใจ ซึ่งต้องพัฒนาแนวคิดของการส่งหลายค่าแบบวัฏจักรบนปริภูมิเมตริก dqb และพิสูจน์ค่าของจุดตรึงสำหรับการส่งดังกล่าว

แนวคิดของการส่งแบบหดตัวหลายค่าได้รับการแนะนำครั้งแรกโดย Sam B. Nadler Jr. ในปี ค.ศ. 1967 เขาได้รวมแนวคิดของการส่งแบบหลายค่า และการส่งของ Lipschitz และพิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงบางข้อ ต่อมาในปี ค.ศ. 2011 Kaewkhao & Neammanee ได้ขยายแนวคิดของการส่งค่าเดียวแบบวัฏจักร ไปยังกรณีของการส่งหลายค่า และศึกษาการมีอยู่ของจุดตรึง

ในปี พ.ศ. 2558 Klin-eam & Suanoom ได้แนะนำปริภูมิเมตริกเสมือนแบบคลาดเคลื่อน ซึ่งกำหนดปริภูมิเสมือนเมตริก b และปริภูมิเมตริก b ที่คลาดเคลื่อน และนำเสนอแนวคิดของการส่งแบบหดตัวแบบวัฏจักร และการส่งแบบวัฏจักรแบบ Kannan ในลักษณะที่คลาดเคลื่อนปริภูมิเมตริกเสมือน b และรับการมีอยู่ของทฤษฎีบทจุดตรึง ในงานวิจัยนี้เราได้ขยายแนวคิดของการส่งแบบหดตัวแบบวัฏจักร-บานาค และการส่งแบบวัฏจักรแบบ Kannan ไปยังกรณีของการส่งแบบหลายค่า และได้มาซึ่งการมีอยู่ของทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิเมตริก dqb ต่อไป ซึ่งแสดงแนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีการส่งแบบหลายค่าบนปริภูมิเมตริก dqb ให้ (X,d,s) เป็นปริภูมิเมตริก dqb และ $A, B \in CB(X)$ กำหนดให้ฟังก์ชัน $H: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}^+$ โดย

$$H(A,B) = \max\{h(A,B), h(B,A)\}$$

โดยที่

$$h(A,B)=\sup\{d(a,B):a\in A\}$$

และ

$$d(a,B)=\inf\{d(a,b):b\in B\}$$

ในบทตั้งต่อไปนี้ เราแสดงรายการคุณสมบัติพื้นฐานบางอย่างของ H

บทตั้ง 3.1 กำหนดให้ (X,d,s) คือ ปริภูมิเมตริก dqb สำหรับทุก $A,B\in CB(X)$ และสำหรับทุก $x,y\in X$ ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $d(x,B)\le d(x,b)$ สำหรับทุก $b\in B$
2. $h(A,B)\le H(A,B)$
3. $d(a,B)\le H(A,B)$ สำหรับทุก $a\in A$
4. $H(A,A)=0$
5. $H(A,B)=H(B,A)$
6. $d(x,A)\le s[d(x,y)+d(y,A)]$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้มีประโยชน์สำหรับการพิสูจน์บางส่วนในงานวิจัย

บทตั้ง 3.2 กำหนดให้ (X,d,s) คือ ปริภูมิเมตริก dqb และเป็นเซตย่อยแบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ X และ $x\in X$ ถ้า $d(x,A)=0$ แล้ว $x\in A$

พิสูจน์ สมมุติว่า $d(x,A)=0$ และมี $\inf\{d(x,a):a\in A\}=0$ แล้วค่าของลำดับ $\{a_n\}$ ใน A โดยที่ $d(x,a_n)<\frac{1}{n}$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ ต่อไปเราจะแสดงว่าลำดับ $\{a_n\}$ dqb ลู่เข้าสู่ค่า x กำหนดให้ $\varepsilon>0$ โดยคุณสมบัติ Archimedean จะมี $N\in\mathbb{N}$ โดยที่ $\frac{1}{N}<\varepsilon$ สำหรับแต่ละ $n\in\mathbb{N}$ และ $n\ge N, d(x,a_n)<\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}<\varepsilon$ ดังนั้นลำดับ $\{a_n\}$ dqb ลู่เข้าสู่ค่า x เนื่องจาก A คือเซตปิดแล้วจะได้ $x\in A$

บทตั้ง 3.3 กำหนดให้ (X,d,s) คือ ปริภูมิเมตริก dqb และ $A,B\in CB(X)$ ถ้า $H(A,B)=0$ แล้ว $A=B$

พิสูจน์ สมมุติว่า $H(A,B)=0$ และเนื่องจาก $\{h(A,B),h(B,A)\}=0$ โดยที่ $h(A,B)=0$ และ $h(B,A)=0$ เนื่องจาก $h(A,B)=0,\ d(a,B)=0$ สำหรับทุก $a\in A$ จากบทตั้ง 3.2 จะได้ $a\in B$ ดังนั้นอนุมานได้ว่า $A\subset B$

นั่นคือ $A=B$

บทตั้ง 3.4 กำหนดให้ (X,d,s) คือ ปริภูมิเมตริก dqb และ $A,B \in CB(X)$ สำหรับทุกค่า $q>1$ และ $x \in A, y \in B$ โดยที่ $d(x,y) \leq qH(A,B)$

พิสูจน์ กำหนดให้ $q>1$ และ $x \in A$ นิยามโดย $d(x,B)$ และ $y \in B$ โดยที่

$$d(x,y) \leq qd(x,B) \leq qh(A,B) \leq qH(A,B)$$

ทั้งนี้ใช้ผลลัพธ์ในส่วนก่อนหน้าเพื่อรับสองทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าแบบวัฏจักรในปริภูมิเมตริก dqb

ทฤษฎีบท 3.12 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิสมบูรณ์เมตริก dqb (X,d,s) และ $T: A \cup B \to CB(X)$ คือการส่งแบบวัฏจักรหลายค่า ถ้าค่าคงที่ $a \in [0,1)$ และ $sa<1$ โดยที่

$$H(Tx,Ty) \leq ad(x,y)$$

สำหรับทุก $x \in A, y \in B$ แล้ว T เป็นจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

พิสูจน์ กำหนดให้ $1<q<\dfrac{1}{sa}$ และ $x_0 \in A$ เป็นจุดตรึง และเลือก $x_1 \in Tx_0 \subseteq B$ จากบทตั้ง 3.4 ค่าของ $x_2 \in Tx_1 \subseteq B$ โดยที่

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &\leq qH(Tx_0,Tx_1) \\ &\leq qad(x_0,x_1) \end{aligned}$$

จากบทตั้ง 3.4 ค่าของ $x_3 \in Tx_2 \subseteq B$ โดยที่

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &\leq qH(Tx_1,Tx_2) \\ &\leq qad(x_1,x_2) \\ &\leq (qa)^2 d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

และจากบทตั้ง 3.4 ค่าของ $x_4 \in Tx_3 \subseteq A$ โดยที่

$$\begin{aligned} d(x_3,x_4) &\leq qH(Tx_2,Tx_3) \\ &\leq qad(x_2,x_3) \\ &\leq (qa)^3 d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

ดำเนินการต่อขั้นตอนต่อไปนี้ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $x_{n+1} \in Tx_n$ โดยที่

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+1}) &\leq (qa)^n d(x_0,x_1) \\ &\leq \alpha^n d(x_0,x_1) \quad \text{เมื่อ} \quad \alpha = qa \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\alpha = qa$ และ $q < \dfrac{1}{sa}$

$$s\alpha = sqa < a\left(\frac{1}{sa}\right)a = 1$$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ คือ dqb-Cauchy กำหนดให้ $m,n \in \mathbb{N}$ และ $m=n+k$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$ โดยใช้อสมการสามเหลี่ยมจะได้

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(x_n, x_{n+k}) \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, x_{n+k}) \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d(x_{n+2}, x_{n+k}) \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + s^3 d(x_{n+3}, x_{n+k}) \\
&\vdots \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + s^k d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\
&\le s\alpha^n d(x_0, x_1) + s\alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + s^k \alpha^{n+k+1} d(x_0, x_1) \\
&= [1 + (s\alpha) + (s\alpha)^2 + \ldots + (s\alpha)^{k-1}] s\alpha^n d(x_0, x_1) \\
&= \left[\frac{1-(s\alpha)^k}{1-s\alpha}\right] s\alpha^n d(x_0, x_1) \\
&= \left[\frac{1}{1-s\alpha}\right] s\alpha^n d(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\alpha < 1$ และจะได้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ dqb-Cauchy เนื่องจาก (X,d,s) สมบูรณ์ เป็นลำดับ $\{x_n\}$ dqbลู่เข้าสู่บาง $x \in X$ สังเกตได้ว่า $\{x_{2n}\}$ เป็นลำดับใน A และ $\{x_{2n-1}\}$ เป็นลำดับใน B และทั้งสองลำดับมีแนวโน้มที่จะลู่เข้าสู่ค่า x เท่ากัน . เนื่องจาก A และ B เป็นเซตปิด และ $x \in A \cap B$ ซึ่งจะแสดงว่า $x \in Tx$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
d(x,Tx) &\le s\left[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx)\right] \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, Tx) \\
&\le sd(x, x_{n+1}) + sH(Tx_n, Tx) \\
&= sd(x, x_{n+1}) + sH(Tx, Tx_n) \\
&\le sd(x, x_{n+1}) + sad(x, x_n)
\end{aligned}
$$

เนื่องจากลำดับ $\{x_n\}$ dqbลู่เข้าสู่ x จะได้ $\lim_{n\to\infty} d(x,Tx) = 0$ ดังนั้น $d(x,Tx) = 0$ เนื่องจาก Tx คือเซตปิด และจากบทตั้ง 3.2 ซึ่ง $x \in Tx$ ดังนั้น $x \in Tx$ ซึ่งมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ $X = [-1,1]$ และ $T : A \cup B \to A \cup B$ นิยามโดย $Tx = \left\{\frac{-x}{110}\right\}$

สมมุติว่า $A = [-1,0]$ และ $B = [0,1]$ นิยามฟังก์ชันโดย $d : X \times X \to [0,\infty)$ โดย

$$d(x,y) = |x-y|^2 + \frac{|x|}{10} + \frac{|y|}{11}$$

จะเห็นได้ว่า d คือเมตริก dqb บน X กำหนดให้ $x \in A$ แล้ว $Tx = \left\{\frac{-x}{110}\right\} \subset B$ ในทางกลับกัน กำหนดให้ $y \in B$ แล้ว $Ty = \left\{\frac{-y}{110}\right\} \subset A$ ดังนั้น T จึงเป็นวัฏจักรต่อไปเราจะพิจารณา

$$H(Tx,Ty)=\max\left\{h\left(\left\{\frac{-x}{110}\right\},\left\{\frac{-y}{110}\right\}\right),h\left(\left\{\frac{-y}{110}\right\},\left\{\frac{-x}{110}\right\}\right)\right\}$$
$$=\max\left\{d\left(\frac{-x}{110},\frac{-y}{110}\right),d\left(\frac{-y}{110},\frac{-x}{110}\right)\right\}$$

ถ้า $\max\left\{d\left(\frac{-x}{110},\frac{-y}{110}\right),d\left(\frac{-y}{110},\frac{-x}{110}\right)\right\}=d\left(\frac{-x}{110},\frac{-y}{110}\right)$ จะได้

$$\begin{aligned}H(Tx,Ty)&=d\left(\frac{-x}{110},\frac{-y}{110}\right)\\&=\left|\frac{-x}{110}-\frac{-y}{110}\right|^2+\frac{1}{10}\left|\frac{-x}{110}\right|+\frac{1}{11}\left|\frac{-y}{110}\right|\\&=\frac{1}{12100}|x-y|^2+\frac{1}{1100}|x|+\frac{1}{1210}|y|\\&=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{1210}|x-y|^2+\frac{1}{110}|x|+\frac{1}{121}|y|\right]\\&\le\frac{1}{10}\left[|x-y|^2+\frac{1}{10}|x|+\frac{1}{11}|y|\right]\\&\le\frac{1}{10}d(x,y)\end{aligned}$$

ถ้า $\max\left\{d\left(\frac{-x}{110},\frac{-y}{110}\right),d\left(\frac{-y}{110},\frac{-x}{110}\right)\right\}=d\left(\frac{-y}{110},\frac{-x}{110}\right)$ จะได้

$$\begin{aligned}H(Tx,Ty)&=d\left(\frac{-y}{110},\frac{-x}{110}\right)\\&=\left|\frac{-y}{110}-\frac{-x}{110}\right|^2+\frac{1}{10}\left|\frac{-y}{110}\right|+\frac{1}{11}\left|\frac{-x}{110}\right|\\&=\frac{1}{12100}|y-x|^2+\frac{1}{1100}|y|+\frac{1}{1210}|x|\\&=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{1210}|y-x|^2+\frac{1}{110}|y|+\frac{1}{121}|x|\right]\\&\le\frac{1}{10}\left[|y-x|^2+\frac{1}{10}|y|+\frac{1}{11}|x|\right]\\&\le\frac{1}{10}d(y,x)\end{aligned}$$

ดังนั้น T เป็นไปตามเงื่อนไขของทฤษฎีบท 3.12 และ 0 เป็นจุดตรึงของ T ในทฤษฎีบทถัดไปเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงสำหรับการส่งหลายค่าแบบ Kannan แบบวัฏจักร dqb ในปริภูมิเมตริก dqb

ทฤษฎีบท 3.13 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิสมบูรณ์เมตริก dqb (X,d,s) และ $T:A\cup B\to CB(X)$ คือการส่งแบบวัฏจักรหลายค่า ถ้าค่าคงที่ $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ และ $sb<\frac{1}{2}$ โดยที่

$$H(Tx,Ty)\leq b\left[d(x,Tx),d(y,Ty)\right]$$

สำหรับทุก $x\in A,y\in B$ แล้ว T เป็นจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A\cap B$

พิสูจน์ กำหนดให้ $1<q<\frac{1}{2sb}$ และ $x_0\in A$ เป็นจุดตรึง และเลือก $x_1\in Tx_0\subseteq B$ จากบทตั้ง 3.4 ค่าของ $x_2\in Tx_1\subseteq B$ โดยที่

$$\begin{aligned}d(x_1,x_2)&\leq qH(Tx_0,Tx_1)\\&\leq qb\left[d(x,Tx_0)+d(x_1,Tx_1)\right]\\&\leq qbd(x_0,x_1)+qbd(x_1,x_2)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$d(x_1,x_2)\leq\frac{qb}{1-qb}d(x_0,x_1)$$

และจากบทตั้ง 3.4 ค่าของ $x_3\in Tx_2\subseteq B$ โดยที่

$$\begin{aligned}d(x_2,x_3)&\leq qH(Tx_1,Tx_2)\\&\leq qb\left[d(x_1,Tx_1)+d(x_2,Tx_2)\right]\\&\leq qbd(x_1,x_2)+qbd(x_2,x_3)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}d(x_2,x_3)&\leq\frac{qb}{1-qb}d(x_1,x_2)\\&\leq\left(\frac{qb}{1-qb}\right)^2d(x_0,x_1)\end{aligned}$$

และจากบทตั้ง 3.4 ค่าของ $x_4\in Tx_3\subseteq A$ โดยที่

$$\begin{aligned}d(x_3,x_2)&\leq qH(Tx_2,Tx_3)\\&\leq qb\left[d(x_2,Tx_2)+d(x_3,Tx_3)\right]\\&\leq qbd(x_2,x_3)+qbd(x_3,x_4)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}d(x_3,x_4)&\leq\frac{qb}{1-qb}d(x_2,x_3)\\&\leq\left(\frac{qb}{1-qb}\right)^3d(x_0,x_1)\end{aligned}$$

ดำเนินการด้วยขั้นตอนต่อไปนี้ สำหรับ $n\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $x_{n+1}\in Tx_n$

โดยที่

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \left(\frac{qb}{1-qb}\right)^n d(x_0, x_1)$$

$$\le \beta^n d(x_0, x_1) \quad \text{โดยที่} \quad \beta = \frac{qb}{1-qb}$$

เนื่องจาก $\beta = \dfrac{qb}{1-qb}$ และ $q < \dfrac{1}{2sb}$

$$2sqb < 1$$
$$sqb < 1 - sqb$$
$$sqb < 1 - qb$$
$$s\beta = \frac{sqb}{1-qb} < 1$$

ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ dqb-Cauchy กำหนดให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $m = n + k$ โดยใช้อสมการสามเหลี่ยม จะได้

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(x_n, x_{n+k}) \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, x_{n+k}) \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d(x_{n+2}, x_{n+k}) \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + s^3 d(x_{n+3}, x_{n+k}) \\
&\vdots \\
&\le sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + s^k d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\
&\le s\beta^n d(x_0, x_1) + s\beta^{n+1} d(x_0, x_1) + \ldots + s^k \beta^{n+k+1} d(x_0, x_1) \\
&= [1 + (s\beta) + (s\beta)^2 + \ldots + (s\beta)^{k-1}] s\beta^n d(x_0, x_1) \\
&= \left[\frac{1-(s\beta)^k}{1-s\beta}\right] s\beta^n d(x_0, x_1) \\
&= \left[\frac{1}{1-s\beta}\right] s\beta^n d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\beta < 1$ และจะได้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ dqb-Cauchy เนื่องจาก (X, d, s) สมบูรณ์ เป็นลำดับ $\{x_n\}$ dqbลู่เข้าสู่บาง $x \in X$ สังเกตได้ว่า $\{x_{2n}\}$ เป็นลำดับใน A และ $\{x_{2n-1}\}$ เป็นลำดับใน B และทั้งสองลำดับมีแนวโน้มที่จะลู่เข้าสู่ค่า x เท่ากัน . เนื่องจาก A และ B เป็นเซตปิด และ $x \in A \cap B$ ซึ่งจะแสดงว่า $x \in Tx$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
d(x,Tx) &\le sd(x_n,x_{n+1}) + sd(x_{n+1},Tx) \\
&= sd(x_n,x_{n+1}) + sH(x_{n+1},Tx) \\
&\le sd(x,x_{n+1}) + sb\left[d(x_n,Tx_n) + d(x,Tx)\right] \\
&= sd(x,x_{n+1}) + sbd(x_n,x_{n+1}) + sbd(x,Tx) \\
&\le sd(x,x_{n+1}) + sb\beta^n d(x_0,x_1) + sbd(x,Tx)
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$d(x,Tx) < \frac{s}{1-sb} d(x,x_{n+1}) + \frac{sb}{1-sb}\beta^n d(x_0,x_1)$$

เนื่องจากลำดับ $\{x_n\}$ dqb ลู่เข้าสู่ x และ $\beta < 1$ จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,Tx) = 0$ ดังนั้น $d(x,Tx) = 0$ เนื่องจาก Tx คือเซตปิด และจากบทตั้ง 3.2 ซึ่ง $x \in Tx$ ดังนั้น $x \in Tx$ ซึ่งมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุดใน $A \cap B$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $X = [-1,1]$ และ $T : A \cup B \to CB(X)$ นิยามโดย $Tx = \left\{\frac{-x}{7}\right\}$ สมมุติว่า $A = [-1,0]$ และ $B = [0,1]$ นิยามฟังก์ชันโดย $d : X \times X \to [0,\infty)$ โดย

$d(x,y) = |x-y|^2 + 3|x| + 2|y|$

จะเห็นได้ว่า d คือเมตริก dqb บน X กำหนดให้ $x \in A$ แล้ว $Tx = \left\{\frac{-x}{7}\right\} \subset B$ ในทางกลับกัน กำหนดให้ $y \in B$ แล้ว $Ty = \left\{\frac{-y}{7}\right\} \subset A$ ดังนั้น T จึงเป็นวัฏจักรต่อไปเราจะพิจารณา

$$
\begin{aligned}
H(Tx,Ty) &= \max\left\{ h\left(\left\{\frac{-x}{7}\right\},\left\{\frac{-y}{7}\right\}\right), h\left(\left\{\frac{-y}{7}\right\},\left\{\frac{-x}{7}\right\}\right)\right\} \\
&= \max\left\{ d\left(\frac{-x}{7},\frac{-y}{7}\right), d\left(\frac{-y}{7},\frac{-x}{7}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ถ้า $\max\left\{ d\left(\frac{-x}{7},\frac{-y}{7}\right), d\left(\frac{-y}{7},\frac{-x}{7}\right)\right\} = d\left(\frac{-x}{7},\frac{-y}{7}\right)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
H(Tx,Ty) &= d\left(\frac{-x}{7},\frac{-y}{7}\right) \\
&= \left|\frac{-x}{7} - \frac{-y}{7}\right|^2 + 3\left|\frac{-x}{7}\right| + 2\left|\frac{-y}{7}\right| \\
&= \frac{1}{49}|x-y|^2 + \frac{3}{7}|x| + \frac{2}{7}|y| \\
&\le \frac{2}{49}|x|^2 + \frac{2}{49}|y|^2 + \frac{3}{7}|x| + \frac{2}{7}|y|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{2}{23}\left[\left(\frac{64}{49}|x|^2+\frac{23}{7}|x|\right)+\left(\frac{64}{49}|y|^2+\frac{23}{7}|y|\right)\right]\\
&=\frac{2}{23}\left[\left(\left|x+\frac{x}{7}\right|^2+3|x|+2\left|\frac{x}{7}\right|\right)+\left(\left|y+\frac{y}{7}\right|^2+3|y|+2\left|\frac{y}{7}\right|\right)\right]\\
&=\frac{2}{23}\left[\left(\left|x-\frac{-x}{7}\right|^2+3|x|+2\left|\frac{-x}{7}\right|\right)+\left(\left|y-\frac{-y}{7}\right|^2+3|y|+2\left|\frac{-y}{7}\right|\right)\right]\\
&\le \frac{2}{23}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right]
\end{aligned}
$$

ถ้า $\max\left\{d\left(\frac{-x}{7},\frac{-y}{7}\right),d\left(\frac{-y}{7},\frac{-x}{7}\right)\right\}=d\left(\frac{-y}{7},\frac{-x}{7}\right)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
H(Tx,Ty)&=d\left(\frac{-y}{7},\frac{-x}{7}\right)\\
&=\left|\frac{-y}{7}-\frac{-x}{7}\right|^2+3\left|\frac{-y}{7}\right|+2\left|\frac{-x}{7}\right|\\
&=\frac{1}{49}|y-x|^2+\frac{3}{7}|y|+\frac{2}{7}|x|\\
&\le \frac{2}{49}|y|^2+\frac{2}{49}|x|^2+\frac{3}{7}|y|+\frac{2}{7}|x|\\
&\le \frac{2}{23}\left[\left(\frac{64}{49}|y|^2+\frac{23}{7}|y|\right)+\left(\frac{64}{49}|x|^2+\frac{23}{7}|x|\right)\right]\\
&=\frac{2}{23}\left[\left(\left|y+\frac{y}{7}\right|^2+3|y|+2\left|\frac{y}{7}\right|\right)+\left(\left|x+\frac{x}{7}\right|^2+3|x|+2\left|\frac{x}{7}\right|\right)\right]\\
&=\frac{2}{23}\left[\left(\left|y-\frac{-y}{7}\right|^2+3|y|+2\left|\frac{-y}{7}\right|\right)+\left(\left|x-\frac{-x}{7}\right|^2+3|x|+2\left|\frac{-x}{7}\right|\right)\right]\\
&=\frac{2}{23}\left[\left(\left|x-\frac{-x}{7}\right|^2+3|x|+2\left|\frac{-x}{7}\right|\right)+\left(\left|y-\frac{-y}{7}\right|^2+3|y|+2\left|\frac{-y}{7}\right|\right)\right]\\
&\le \frac{2}{23}\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น T เป็นไปตามเงื่อนไขของทฤษฎีบท 3.13 และ 0 เป็นจุดคงที่ของ T ผลสืบเนื่องต่อไปนี้ถือได้ว่าเป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบท 3.13 ถ้าใช้ $s=1$