บทที่ 4
ผลการวิจัย

บทนิยาม 4.1 กำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่าง และ $T: X \to \mathrm{N}(X)$ และ $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ เป็นการส่งสองฟังก์ชัน แล้วเรียก T ว่าสามเหลี่ยม α_*-admissible ถ้า T คือ α_*-admissible และ

$$\alpha(x,y) \ge 1 \text{ และ } \alpha_*(Tx,Ty) \ge 1 \Rightarrow \alpha(x,z) \ge 1, \forall z \in Ty$$

บทนิยาม 4.2 กำหนดให้ X ไม่เป็นเซตว่าง และ $T: X \to \mathrm{N}(X)$ และ $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ เป็นการส่งสองฟังก์ชัน แล้วเรียก T ว่าสามเหลี่ยม α-admissible ถ้า T คือ α-admissible และ

$$\alpha(x,y) \ge 1 \text{ และ } \alpha(y,z) \ge 1 \Rightarrow \alpha(x,z) \ge 1, \forall z \in Ty$$

การส่งแบบสามเหลี่ยม α_* ที่ยอมรับได้ (triangular α_*-admissible mapping) เช่นเดียวกันกับการส่งแบบสามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้ (triangular α-admissible mapping)

บทตั้ง 4.1 กำหนดให้ $T: X \to \mathrm{N}(X)$ คือ การส่งแบบสามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้ (triangular α- admissibility mapping) สมมุติว่าค่า $x_0 \in X$ และ $x_1 \in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1) \ge 1$ สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ โดยที่ $x_{n+1} \in Tx_n$ และมี $\alpha(x_n,x_m) \ge 1$ สำหรับทุก $m,n \in \mathbb{N}$ และ $n < m$

พิสูจน์ เนื่องจากค่า $x_0 \in X$ และ $x_1 \in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1) \ge 1$ แล้ว α ที่ยอมรับได้ของ T และมี $\alpha(x_1,x_2) \ge 1$ เมื่อทำขั้นตอนต่อไปนี้จะได้ $\alpha(x_n,x_{n+1}) \ge 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ สมมุติว่า $n < m$ เนื่องจาก $\alpha(x_n,x_{n+1}) \ge 1$และ $\alpha(x_{n+1},x_{n+2}) \ge 1$ จากนั้นใช้สามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้ของ T (triangular α-admissibility mapping) ซึ่งมี $\alpha(x_{n+1},x_{n+2}) \ge 1$ และเนื่องจาก $\alpha(x_{n+1},x_{n+2}) \ge 1$ และ $\alpha(x_{n+2},x_{n+3}) \ge 1$ จากนั้นเราอนุมานได้ว่า $\alpha(x_n,x_{n+3}) \ge 1$ เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนนี้ต่อไปจะได้ $\alpha(x_n,x_m) \ge 1$

บทนิยาม 4.3 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \to CB(X)$ การส่ง T เรียกว่าการส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G ถ้าค่า $\zeta \in \mathrm{Z}_G$ และ $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ โดยที่

$$\zeta((\alpha(x,y)\mathrm{H}(Tx,Ty), d(x,y)) \ge C_G \qquad (4.1)$$

สำหรับทุก $x, y \in T$ และ $x \ne y$

บทนิยาม 4.4 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \to CB(X)$ เรียก T ว่า การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G ถ้าค่า $\zeta \in \mathrm{Z}_G$ และ $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ โดยที่

$$\zeta((\alpha(x,y)\mathrm{H}(Tx,Ty), M(x,y)) \geq C_G \tag{4.2}$$

สำหรับทุก $x, y \in T$ และ $x \neq y$

เมื่อ $$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \to CB(X)$ คือ การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G สมมติว่ามีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(i) (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก α ที่สมบูรณ์ (α -complete)

(ii) ค่าของ $x_0 \in X$ และ $x_1 \in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$

(iii) T คือ สามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้

(iv) T คือการส่งหลายค่าแบบ α ที่ต่อเนื่อง

แล้ว T เป็นจุดตรึง

พิสูจน์ เนื่องจากเงื่อนไขที่ (ii) มีค่าของ $x_0 \in X$ และ $x_1 \in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ ถ้า $x_0 = x_1$ หรือ $x_1 = Tx_1$ แล้ว x_1 เป็นจุดตรึงของ T สมมติว่า $x_1 \notin Tx_1$ เนื่องจาก T เป็นการส่งจาก X ถึง $CB(X)$ จึงสามารถเลือก $x_2 \in Tx_1$ นั่นคือ

$$d(x_1,x_2) \leq \mathrm{H}(Tx_0,Tx_1)$$

ทั้งนี้สามารถเลือกจุด $x_3 \in Tx_2$ นั่นคือ

$$d(x_2,x_3) \leq \mathrm{H}(Tx_1,Tx_2)$$

นั่นคือเราจึงได้ลำดับ $\{x_n\}$ ใน X โดยที่ $x_{n+1} \in Tx_n,\ x_n \notin Tx_n$ และ

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \mathrm{H}(Tx_n,Tx_{n+1}) \tag{4.3}$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $x_2 \in Tx_1,\ x_3 \in Tx_2$ และ T เป็น α -ที่ยอมรับได้ (α -admissible)

และ $$\alpha(x_1,x_2) \geq 1 \Rightarrow \alpha(x_2,x_3) \geq 1$$

จะได้

$$\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1 \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{4.4}$$

จากสมการ (3.2)

$$\begin{aligned} C_G &\leq \zeta\left(\alpha(x_n,x_{n+1})\mathrm{H}(Tx_n,Tx_{n+1}), M(x_n,x_{n+1})\right) \\ &< G\left(M(x_n,x_{n+1})\alpha(x_n,x_{n+1}), \mathrm{H}(Tx_n,Tx_{n+1})\right) \end{aligned}$$

นอกจากนี้ยังใช้เงื่อนไข (i) ของบทนิยาม 2.11 จะได้

$$\mathrm{H}(Tx_n,Tx_{n+1}) \leq \alpha(x_n,x_{n+1})\mathrm{H}(Tx_n,Tx_{n+1}) < M\mathrm{H}(x_n,x_{n+1}) \tag{4.5}$$

โดยที่

$$M(x_n, x_{n+1}) = \max\left\{\begin{array}{l} d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1}), \\ \dfrac{d(x_n, Tx_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n)}{2} \end{array}\right\}$$

$$= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\right\}$$

ถ้า $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_{n+1}, Tx_{n+1})$ แล้วจากสมการ (3.5) จะได้

$$\mathrm{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) \le d(x_{n+1}, Tx_{n+1})$$

เนื่องจากเห็นได้ว่าขัดแย้งกัน ดังนั้น $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$ และเป็นผลมาจากสมการ (4.5) จะได้

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \le \mathrm{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) < M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1}) \qquad (4.6)$$

ดังนั้นสำหรับทุก $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะมี $d(x_n, x_{n+1}) > d(x_{n+1}, x_{n+2})$ นั่นคือ $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ คือ ลำดับที่ลดลงของจำนวนจริงไม่ติดลบ และด้วยเหตุนี้จึงทำให้ค่าของ $L \ge 0$ นั่นคือทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+1}) = L$$

สมมติว่า $L > 0$ เนื่องจาก $\alpha(x_n, x_{n+1})\mathrm{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) < M(x_n, x_{n+1})$ จึงได้

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(x_n, x_{n+1})\mathrm{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) = L \qquad (4.7)$$

จากนั้นใช้สมการ(3.2) และ (b) ของบทนิยาม 2.10 จะได้

$$\begin{aligned} C_G &\le \limsup_{n\to\infty} \zeta\left(\alpha(x_n, x_{n+1})\mathrm{H}(Tx_n, Tx_{n+1}), M(x_n, x_{n+1})\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \zeta\left(\alpha(x_n, x_{n+1})\mathrm{H}(Tx_n, Tx_{n+1}), d(x_n, x_{n+1})\right) \\ &< C_G \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งกัน และด้วยเหตุนี้ $L = 0$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับ Cauchy จะได้บทตั้ง 2.1 โดยทำให้ได้ว่าค่าของ

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m(k+1)}, x_{n(k)+1}) = \varepsilon \qquad (4.8)$$

และด้วยเหตุนี้

$$\lim_{k\to\infty} M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon \qquad (4.9)$$

กำหนดให้ $x = x_{m(k)}, y = x_{n(k)}$ เนื่องจาก T คือสามเหลี่ยม α -orbital ที่ยอมรับได้ (triangular α -orbital admissible) จากบทตั้ง 4.1 จะได้ $\alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \ge 1$ จากสมการ 4.2

$$\begin{aligned} C_G &\le \zeta\left(\alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)})\mathrm{H}(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}), M(x_{m(k)}, x_{n(k)})\right) \\ &= G\left(M(x_{m(k)}, x_{n(k)})\alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)}), \mathrm{H}(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)})\right) \end{aligned}$$

เมื่อ $M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = d(x_{m(k)}, x_{n(k)})$ ต่อไปใช้เงื่อนไข (ii) ของบทนิยาม 2.11 จะได้

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) &\le \alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)})\mathrm{H}(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}) \\ &< M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \qquad (4.10) \\ &= d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \end{aligned}$$

และใช้สมการ (4.8) และ (4.9) ลงในสมการ (4.10) จะได้

$$\lim_{k\to\infty}\alpha(x_{m(k)},x_{n(k)})\mathrm{H}(Tx_{m(k)},Tx_{n(k)})=\varepsilon$$

ฉะนั้นจึงใช้สมการ (4.2) และ (b) ของบทนิยาม 2.10 จะได้

$$\begin{aligned}C_G &\le \limsup_{n\to\infty}\zeta\left(\alpha(x_{m(k)},x_{n(k)})\mathrm{H}(Tx_{m(k)},Tx_{n(k)}),M(x_{m(k)},x_{n(k)})\right)\\ &< C_G\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งกัน ดังนั้น $\{x_n\}$ จึงเป็นลำดับ Cauchy จากสมการ (4.4) และ α -ความสมบูรณ์ (α -completeness) ของ (X,d) ค่าของ $u\in X$ นั่นคือ $x_n \xrightarrow{d} u$ โดยที่ $n\to\infty$ โดย α ที่ต่อเนื่องของการส่งแบบหลายค่า T จะได้

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{H}(Tx_n,x)=0 \tag{4.11}$$

ทำให้ได้ว่า

$$d(u,Tu)=\lim_{n\to\infty}d(x_{n+1},Tu)\le\lim_{n\to\infty}\mathrm{H}(Tx_n,u)=0$$

ดังนั้น $u\in Tu$ และจะได้ว่า T เป็นจุดตรึง

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T:X\to CB(X)$ คือ การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G สมมติว่ามีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- (i) (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก α ที่สมบูรณ์ (α -complete)
- (ii) ค่าของ $x_0\in X$ และ $x_1\in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1)\ge 1$
- (iii) T คือ สามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้
- (iv) T คือการส่งหลายค่าแบบ α ที่ต่อเนื่อง

แล้ว T เป็นจุดตรึง

พิสูจน์ ในลักษณะเดียวกับในทฤษฎีบท 3.1

บทแทรก 4.1 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T:X\to CB(X)$ คือ การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G สมมติว่ามีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- (i) (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก α ที่สมบูรณ์ (α -complete)
- (ii) ค่าของ $x_0\in X$ และ $x_1\in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1)\ge 1$
- (iii) T คือ สามเหลี่ยม α_* ที่ยอมรับได้
- (iv) T คือการส่งหลายค่าแบบ α ที่ต่อเนื่อง

แล้ว T เป็นจุดตรึง

บทแทรก 4.2 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T:X\to CB(X)$ คือ การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G สมมติว่ามีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(i) (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก α ที่สมบูรณ์ (α-complete)

(ii) ค่าของ $x_0\in X$ และ $x_1\in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1)\ge 1$

(iii) T คือ สามเหลี่ยม α_* ที่ยอมรับได้

(iv) T คือการส่งแบบหลายค่าอย่างต่อเนื่อง

แล้ว T เป็นจุดตรึง

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ $X=(-10,10)$ ด้วยเมตริก $d(x,y)=|x-y|$ และ $T:X\to CB(X)$ ดังนี้

$$T(x)=\begin{cases}\{-2\} & ;x\in(-10,0)\\ \left[0,\dfrac{5x}{6}\right] & ;x\in[0,2]\\ \left[0,2x-\dfrac{5}{3}\right] & ;x\in(2,5]\\ \{9\} & ;x\in(5,10)\end{cases}$$

และกำหนดให้ $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ โดย

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1 & ;x,y\in[0,2]\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

แล้วปริภูมิ (X,d) คือ α ที่สมบูรณ์ และ T ไม่ต่อเนื่อง แต่ α ต่อเนื่อง เนื่องจากการส่งหลายค่าแบบสามเหลี่ยม α ที่ยอมรับ ถ้า $\alpha(x,y)\ge 1$ แล้วมี $x,y\in[0,2]$ และนั่นคือ $Tx,Ty\subseteq\left[0,\dfrac{5}{3}\right]$ ซึ่งหมายถึง $\alpha(p,q)\ge 1$ สำหรับทุก $p\in Tx$ และ $q\in Ty$ จะได้ T คือ α ที่ยอมรับได้ นอกจากนี้ ถ้า $\alpha(x,y)\ge 1$ แล้ว $x,y\in[0,2]$ นั่นคือ $x\in[0,2]$ และ $Ty\subseteq\left[0,\dfrac{5}{3}\right]$ กำหนดให้ $z\in Ty$ แล้วจะได้ $\alpha(y,z)\ge 1$ และสุดท้าย $x\in[0,2]$ และ $z\in\left[0,\dfrac{5}{3}\right]$ ซึ่ง $\alpha(x,z)\ge 1$

ดังนั้น T คือ สามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้

ถ้าเลือก $x_0=2$ แล้วเงื่อนไข (ii) ของทฤษฎีบท 4.1 พิจารณา $\zeta(t,s)=\dfrac{5}{6}s-t$ และ $G(s,t)=s-t$ แล้ว T คือ การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G เมื่อ $C_G=0$ ดังนั้นเงื่อนไขทั้งหมดของทฤษฎีบท 4.1 สามารถสรุปได้ว่า T เป็นจุดตรึงของ X

ผลลัพธ์ต่อไปแสดงให้เห็นว่า α ที่ต่อเนื่อง หรือความต่อเนื่องของการส่ง T สามารถเงื่อนไข (iv') ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T: X \to CB(X)$ คือ การส่งหลายค่า α-admissible แบบหดตัวของ Z_G สมมติว่ามีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(i) (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก α ที่สมบูรณ์ (α-complete)

(ii) มีค่า $x_0 \in X$ และ $x_1 \in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$

(iii) T คือ สามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้

(iv) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X โดยที่ $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ โดยที่ $n \to \infty$ จะมี $\alpha(x_n, x) \geq 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว T เป็นจุดตรึง

พิสูจน์ เนื่องจากทฤษฎีบท 4.1 ทราบว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน Cauchy ใน X โดยที่ $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ โดยที่ $n \to \infty$ จะมี $\alpha(x_n, x) \geq 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ สำหรับเงื่อนไขที่ (iv) จะได้ $\alpha(x_n, u) \geq 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ โดยใช้สมการ (3.2) จะได้

$$\zeta(\alpha(x_n,u)\mathrm{H}(Tx_n,Tu), M(x_n,u)) \geq C_G \tag{4.12}$$

$$\frac{1}{2}\min\{d(x,Sx), d(y,Ty)\} < d(x,y) \Rightarrow \zeta(\alpha(x_n,u)\mathrm{H}(Sx,Ty), \beta(M(x,y))M(x,y)) \geq C_G$$

โดยที่

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Sx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Sx)}{2}\right\}$$

โดยที่

$$M(x_n,u) = \max\left\{d(x_n,u), d(x,Tx_n), d(u,Tu), \frac{d(x_n,Tu)+d(u,Tx_n)}{2}\right\}$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ สมมุติว่า $d(u,Tu) > 0$ กำหนดให้ $\varepsilon = \dfrac{d(u,Tu)}{2}$ เนื่องจาก $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ โดยที่ $n \to \infty$ และสามารถหาค่า $n_1 \in \mathbb{N}$ จะได้

$$d(u,x_n) < \frac{d(u,Tu)}{2} \tag{4.13}$$

สำหรับทุก $n \geq n_1$ จะได้

$$d(u,Tx_n) \leq d(u,x_{n+1}) < \frac{d(u,Tu)}{2} \tag{4.14}$$

สำหรับทุก $n \geq n_1$ จะได้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ Cauchy และค่าของ $n_2 \in \mathbb{N}$ โดยที่

$$d(x_n,Tx_n) \leq d(x_n,x_{n+1}) < \frac{d(u,Tu)}{2} \tag{4.15}$$

สำหรับทุก $n \geq n_2$ จาก $d(x_n,Tu) \to d(u,Tu)$ โดยที่ $n \to \infty$ สามารถหาค่า $n_3 \in \mathbb{N}$ โดย

$$d(x_n,Tu) < \frac{3d(u,Tu)}{2} \tag{4.16}$$

สำหรับทุก $n \geq n_3$ ใช้สมการ (4.13)- (4.16)

$$M(x_n,u) < d(u,Tu) \tag{4.17}$$

สำหรับทุก $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ จากสมการ (4.12)

$$\begin{aligned} C_G &\le \zeta\big(\alpha(x_n,u)\mathrm{H}(Tx_n,Tu), d(u,Tu)\big) \\ &< G\big(d(u,Tu)\alpha(x_n,u), \mathrm{H}(Tx_n,Tu)\big) \end{aligned}$$

ใชเงื่อนไข (i) ของบทนิยาม 2.11 จะได้

$$\alpha(x_n,u)\mathrm{H}(Tx_n,Tu) < d(u,Tu)$$

เนื่องจาก

$$d(x_{n+1},Tu) \le \mathrm{H}(Tx_n,Tu) \le \alpha(x_n,u)\mathrm{H}(Tx_n,Tu) < d(u,Tu) \tag{4.18}$$

กำหนดให้ $n \to \infty$ จะได้ $d(u,Tu) < d(u,Tu)$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งกัน ดังนั้น $d(u,Tu) = 0$ นั่นคือ $u \in Tu$ เป็นการเสร็จสิ้นการพิสูจน์

บทแทรก 4.3 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T : X \to CB(X)$ คือ การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G สมมติว่ามีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(i) (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก α ที่สมบูรณ์ (α -complete)

(ii) ค่าของ $x_0 \in X$ และ $x_1 \in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1) \ge 1$

(iii) T คือ สามเหลี่ยม α_* ที่ยอมรับได้

(iv') ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X โดยที่ $\alpha(x_n,x_{n+1}) \ge 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ โดยที่ $n \to \infty$ จะมี $\alpha(x_n,x) \ge 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

แล้ว T เป็นจุดตรึง

บทแทรก 4.4 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริก และ $T : X \to CB(X)$ คือ การส่งหลายค่า α ที่ยอมรับได้แบบหดตัวของ Z_G สมมติว่ามีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(i) (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกที่สมบูรณ์

(ii) ค่าของ $x_0 \in X$ และ $x_1 \in Tx_0$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1) \ge 1$

(iii) T คือ สามเหลี่ยม α_* ที่ยอมรับได้

(iv') ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X โดยที่ $\alpha(x_n,x_{n+1}) \ge 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ โดยที่ $n \to \infty$ จะมี $\alpha(x_n,x) \ge 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

แล้ว T เป็นจุดตรึง

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนดให้ $X=(0,1]$ ด้วยเมตริก $d(x,y)=|x-y|$ และ $T:X\to CB(X)$ ดังนี้

$$Tx=\begin{cases}\{\frac{1}{10}\} & ;x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\\ \left\{\frac{3}{5},\frac{3}{4}\right\} & ;x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\\ \left\{\frac{4}{5}\right\} & ;x\in\left(\frac{3}{4},1\right]\end{cases}$$

และกำหนดให้ $\alpha:X\times X\to[0,\infty)$ โดย

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}1 & ;x,y\in\left[\frac{1}{2},1\right]\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

แล้วปริภูมิ (X,d) คือ α ที่สมบูรณ์ และ T ไม่ต่อเนื่อง แต่ α ต่อเนื่อง
พิจารณา $x_n=\frac{3}{4}+\frac{1}{n},\ x=\frac{3}{4}$ เมื่อ T คือสามเหลี่ยม α ที่ยอมรับได้ นอกจากนี้ค่าของ $x_0=\frac{1}{2}$
และ $x_1=\frac{3}{4}\in Tx_0=\left\{\frac{3}{5},\frac{3}{4}\right\}$ โดยที่ $\alpha(x_0,x_1)\geq 1$
กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใน X โดยที่ $\alpha(x_n,x_{n+1})\geq 1$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ และ $x_n\to x$ โดยที่ $n\to\infty$ เราอนุมานได้ว่า $x_n\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ และนั่นคือ $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ ฉะนั้น $\alpha(x_n,x)\geq 1$ และเงื่อนไข (iv') สามารถตรวจสอบได้อย่างง่ายดายว่า T เป็นการส่งแบบหลายค่าที่มีการหดตัวด้วย Z_G ที่ยอมรับได้โดยการหา $\zeta(t,s)=\frac{5}{6}s-t,\ G(t,s)=s-t$ และ $C_G=0$
ดังนั้น T เป็นไปตามเงื่อนไขทั้งหมดของทฤษฎีบท 3.3

จากการดำเนินการข้างต้นทำให้ได้ว่าเราได้มีการพัฒนาทฤษฎีบทใหม่เพื่อพัฒนางานวิจัยให้ดียิ่งขึ้นดังนี้ดังนี้

บทนิยาม 3.2 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $\Omega,\Lambda:\mathrm{Y}\to\mathrm{K}(\mathrm{Y})$ และ $\alpha:\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก Ω ว่าเป็น □ (α,G) การหดตัวแบบเกือบหลายค่าเมื่อเทียบกับ ζ โดยที่

$$\zeta(\alpha(\omega,\rho)H(\Omega\omega,\Lambda\rho),\beta(W)W)\geq C_{\mathrm{G}} \tag{2}$$

สำหรับทุก $\omega,\rho\in\mathrm{Y}$ ซึ่ง $\omega\neq\rho$ และ $\mathrm{L}\geq 0$ โดยที่

$$W=\Theta(\omega,\rho)+\mathrm{L}\Psi(\omega,\rho)$$

ซึ่ง

$$\Theta(\omega,\rho)=\max\left\{d(\omega,\rho),D(\omega,\Omega\omega),D(\rho,\Lambda\rho),\frac{D(\omega,\Lambda\rho)+D(\rho,\Omega\omega)}{2}\right\}$$

และ

$$\Psi(\omega,\rho)=\min\left\{D(\omega,\Omega\omega),D(\rho,\Lambda\rho),\ D(\omega,\Lambda\rho),D(\rho,\Omega\omega)\right\}$$

บทนิยาม 3.2 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $\Omega,\Lambda:\mathrm{Y}\to\mathrm{K}(\mathrm{Y})$ และ $\alpha:\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}\to[0,1)$ เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก Ω ว่าเป็น □ (α,G) การหดตัวแบบเกือบหลายค่าเมื่อเทียบกับ ζ ถ้า

$$\frac{1}{2}\min\{D(\omega,\Omega\omega),D(\rho,\Lambda\rho)\}<d(\omega,\rho)\ \Rightarrow\zeta(L,\beta(W)W)\geq C_{\mathrm{G}} \tag{3}$$

สำหรับทุก $\omega,\rho\in\mathrm{Y}$ ซึ่ง $\Omega\omega\neq\Lambda\rho$ และ $\mathrm{L}\geq 0$ โดยที่

$$\mathrm{L}=\alpha(\omega,\rho)H(\Omega\omega,\Lambda\rho),\mathrm{W}=\Theta(\omega,\rho)+\mathrm{L}\Psi(\omega,\rho)$$

ซึ่ง

$$\Theta(\omega,\rho)=\max\left\{d(\omega,\rho),D(\omega,\Omega\omega),D(\rho,\Lambda\rho),\frac{D(\omega,\Lambda\rho)+D(\rho,\Omega\omega)}{2}\right\}$$

และ

$$\Psi(\omega,\rho)=\min\left\{D(\omega,\Omega\omega),D(\rho,\Lambda\rho),\ D(\omega,\Lambda\rho),D(\rho,\Omega\omega)\right\}.$$

ทฤษฎีบท 3.14 กำหนดให้ (Y,d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $\Omega,\Lambda : Y \to K(Y)$ และ $\alpha : Y \times Y \to [0,1)$ เป็นฟังก์ชัน แล้วเรียก Ω ว่าเป็น □ (α,G) การหดตัวแบบเกือบ Suzuki หลายค่าดังนี้

(i) (Y,d) คือปริภูมิเมตริก α-complete

(ii) Ω,Λ คือสามเหลี่ยม α-admissible

(iii) Ω,Λ คือการส่งหลายค่า α-continuous

แล้ว Ω และ Λ มีจุดตรึงร่วมกัน

พิสูจน์ กำหนดให้ $\omega_0 \in Y$ เลือก $\omega_1 \in \Omega\omega_0$ จากนิยามของเมตริก Hausdorff มีค่า $\omega_2 \in \Lambda\omega_1$ โดยที่

$$\begin{aligned} 0 &< d(\omega_1,\omega_2) \\ &= D(\omega_1,\Lambda\omega_1) \\ &\le \alpha(\omega_0,\omega_1)H(\Omega\omega_0,\Lambda\omega_1) \end{aligned} \tag{4}$$

สมมุติว่า $D(\omega_0,\Omega\omega_0) > 0$ และ $D(\omega_1,\Lambda\omega_1) > 0$ แล้ว

$$\frac{1}{2}\min\{D(\omega_0,\Omega\omega_0), D(\omega_1,\Lambda\omega_1)\} < d(\omega_0,\omega_1)$$

นั่นคือจากสมการที่ (3) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}\min\{D(\omega_0,\Omega\omega_0), D(\omega_1,\Lambda\omega_1)\} < d(\omega_0,\omega_1) \Rightarrow \zeta(L_0,\beta(W_0)W_0) \ge C_G$$

โดยที่ $L_0 = \alpha(\omega_0,\omega_1)H(\Omega\omega_0,\Lambda\omega_1)$ และ $W_0 = \Theta(\omega_0,\omega_1) + L\Psi(\omega_0,\omega_1)$

พิจารณา

$$\begin{aligned} C_G &\le \zeta(L_0,\beta(W_0)W_0) \\ &< G(\beta(W_0)W_0, L_0) \end{aligned} \tag{5}$$

ทำให้ได้ว่า

$$d(\omega_1,\omega_2) \le L_0 < \beta(W_0)W_0 \tag{6}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} &\Theta(\omega_0,\omega_1) \\ &= \max\left\{d(\omega,\omega_1), D(\omega_0,\Omega\omega_0), D(\omega_1,\Lambda\omega_1), \frac{D(\omega_0,\Lambda\omega_1)+D(\omega_1,\Omega\omega_0)}{2}\right\} \\ &\le \max\left\{d(\omega_0,\omega_1), d(\omega_0,\omega_1), d(\omega_1,\omega_2), \frac{d(\omega_0,\omega_2)+d(\omega_1,\omega_1)}{2}\right\} \\ &= \max\left\{d(\omega_0,\omega_1), d(\omega_1,\omega_2), \frac{d(\omega_0,\omega_2)}{2}\right\}. \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\frac{d(\omega_0,\omega_2)}{2} \le \frac{d(\omega_0,\omega_1)+d(\omega_2,\omega_1)}{2} \le \max\{d(\omega_0,\omega_1), d(\omega_1,\omega_2)\}$$

ซึ่ง

$$\Theta(\omega_0,\omega_1) \le \max\{d(\omega_0,\omega_1), d(\omega_1,\omega_2)\}$$

และ

$$\begin{aligned}
&\Psi(\omega_0,\omega_1)\\
&=\min\{D(\omega_0,\Omega\omega_0),D(\omega_1,\Lambda\omega_1),D(\omega_0,\Lambda\omega_1),D(\omega_1,\Omega\omega_0)\}\\
&=\min\{d(\omega_0,\omega_1),d(\omega_1,\omega_2),d(\omega_0,\omega_2),d(\omega_1,\omega_1)\}\\
&=0
\end{aligned}$$

ถ้า $\max\{d(\omega_0,\omega_1),d(\omega_1,\omega_2)\}=d(\omega_1,\omega_2)$ และ $\Psi(\omega_0,\omega_1)=0$ จากสมการที่ (6) จะได้

$$\begin{aligned}
&d(\omega_1,\omega_2)\\
&\le\alpha(\omega_0,\omega_1)\mathrm{H}(\Omega\omega_0,\Lambda\omega_1)\\
&<\beta(d(\omega_1,\omega_2))d(\omega_1,\omega_2)
\end{aligned} \tag{7}$$

จะได้

$$d(\omega_1,\omega_2)\le\alpha(\omega_0,\omega_1)\mathrm{H}(\Omega\omega_0,\Lambda\omega_1)<d(\omega_1,\omega_2)$$

พบว่าเป็นข้อขัดแย้ง จึงสรุปได้ว่า

$$\max\{d(\omega_0,\omega_1),d(\omega_1,\omega_2)\}=d(\omega_0,\omega_1)$$

จากสมการที่ (6) จะได้ว่า

$$d(\omega_1,\omega_2)<d(\omega_0,\omega_1)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $\omega_2\in\Lambda\omega_1$ และ $\omega_3\in\Omega\omega_2$ จะได้

$$d(\omega_2,\omega_3)\le\alpha(\omega_1,\omega_2)\mathrm{H}(\Lambda\omega_1,\Omega\omega_2)<d(\omega_1,\omega_2)$$

ทำให้ได้ว่า

$$d(\omega_2,\omega_3)<d(\omega_1,\omega_2)$$

ในทำนองเดียวกัน และสร้างลำดับ $\{\omega_n\}$ ใน Y

โดยที่ $\omega_{2n+1}\in\Omega\omega_{2n}$ และ $\omega_{2n+2}\in\Lambda\omega_{2n+1}, n=0,1,2,\ldots$ โดยที่

$$\begin{aligned}
0&<d(\omega_{2+1},\omega_{2n+2})\\
&=D(\omega_{2n+1},\Lambda\omega_{2n+1})\\
&\le\alpha(\omega_{2n},\omega_{2n+1})\mathrm{H}(\Omega\omega_{2n},\Lambda\omega_{2n+1})
\end{aligned}$$

และ

$$\frac{1}{2}\min\{D(\omega_{2n},\Omega\omega_{2n}),D(\omega_{2n+1},\Lambda\omega_{2n+1})\}<d(\omega_{2n},\omega_{2n+1})$$

นั่นคือจากสมการที่ (3) จะได้

$$\frac{1}{2}\min\{D(\omega_{2n},\Omega\omega_{2n}),D(\omega_{2n+1},\Lambda\omega_{2n+1})\}<d(\omega_{2n},\omega_{2n+1})\Rightarrow\zeta(L_{2n},\beta(W_{2n})W_{2n})\ge C_G$$

โดยที่

$L_{2n}=\alpha(\omega_{2n},\omega_{2n+1})H(\Omega\omega_{2n},\Lambda\omega_{2n+1})$ และ $W_{2n}=\Theta(\omega_{2n},\omega_{2n+1})+\mathrm{L}\Psi(\omega_{2n},\omega_{2n+1})$

พิจารณา

$$C_G\le\zeta(L_{2n},\beta(W_{2n})W_{2n})<\mathrm{G}(\beta(W_{2n})W_{2n},L_{2n}) \tag{8}$$

ทำให้ได้ว่า

$$d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\le L_{2n}<\beta(W_{2n})W_{2n} \tag{9}$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
&\Theta(\omega_{2n},\omega_{2n+1})\\
&=\max\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),D(\omega_{2n},\Omega\omega_{2n}),D(\omega_{2n+1},\Lambda\omega_{2n+1}),\frac{D(\omega_{2n},\Lambda\omega_{2n+1})+D(\omega_{2n+1},\Omega\omega_{2n})}{2}\right\}\\
&\le\max\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2}),\frac{d(\omega_{2n},\omega_{2n+2})+d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+1})}{2}\right\}\\
&=\max\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2}),\frac{d(\omega_{2n},\omega_{2n+2})}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
&\frac{d(\omega_{2n},\omega_{2n+2})}{2}\\
&\le\frac{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1})+d(\omega_{2n+2},\omega_{2n+1})}{2}\\
&\le\max\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\right\}
\end{aligned}
$$

ซึ่ง

$$\Theta(\omega_{2n},\omega_{2n+1})\le\max\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\right\}$$

และ

$$
\begin{aligned}
&\Psi(\omega_{2n},\omega_{2n+1})\\
&=\min\left\{D(\omega_{2n},\Omega\omega_{2n}),D(\omega_{2n+1},\Lambda\omega_{2n+1}),D(\omega_{2n},\Lambda\omega_{2n+1}),D(\omega_{2n+1},\Omega\omega_{2n})\right\}\\
&=\min\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2}),d(\omega_{2n},\omega_{2n+2}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+1})\right\}\\
&=0
\end{aligned}
$$

ถ้า $\max\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\right\}=d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})$ และ $\Psi(\omega_{2n},\omega_{2n+1})=0$
จากสมการที่ (9) จะได้

$$
\begin{aligned}
&d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\\
&\le\alpha(\omega_{2n},\omega_{2n+1})\mathrm{H}(\Omega\omega_{2n},\Lambda\omega_{2n+1})\\
&<\beta(d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2}))d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})
\end{aligned}
\tag{10}
$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
&d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\\
&\le\alpha(\omega_{2n},\omega_{2n+1})\mathrm{H}(\Omega\omega_{2n},\Lambda\omega_{2n+1})\\
&<d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})
\end{aligned}
$$

พบว่าเป็นข้อขัดแย้ง จึงสรุปได้ว่า

$$\max\left\{d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}),d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\right\}=d(\omega_{2n},\omega_{2n+1})$$

จากสมการที่ (10) จะได้

$$d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})<d(\omega_{2n},\omega_{2n+1})$$

และ

$$d(\omega_{2n+2},\omega_{2n+3})\le\alpha(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})\mathrm{H}(\Omega\omega_{2n+1},\Lambda\omega_{2n+2})<d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2})$$

ทำให้ได้ว่า

$$d(\omega_{2n+2},\omega_{2n+3}) < d(\omega_{2n+1},\omega_{2n+2}) \tag{11}$$

ซึ่ง $d(\omega_{n+1},\omega_{n+2}) < d(\omega_n,\omega_{n+1})$ สำหรับทุก n ดังนั้น $\{d(\omega_n,\omega_{n+1})\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ ซึ่ง $Z \geq 0$ โดยที่

$$\lim_{n\to\infty} d(\omega_n,\omega_{n+1}) = Z$$

สมมุติว่า $Z > 0$ จากสมการที่ (8) จะได้

$$\lim_{n\to\infty} L_{2n} = Z \tag{12}$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} \beta(W_{2n})\, W_{2n} = Z \tag{13}$$

จากสมการที่ (2) และ (G_2) ของบทนิยาม (2.38) จะได้ว่า

$$C_G \leq \limsup_{n\to\infty} \zeta(L_{2n},\beta(W_{2n})W_{2n}) = \limsup_{n\to\infty} \zeta(L_{2n},\beta(d(\omega_{2n},\omega_{2n+1}))d(\omega_{2n},\omega_{2n+1})) < C_G$$

พบว่าเป็นข้อขัดแย้ง และ $z = 0$ เป็นต้น

$$\lim_{k\to\infty} d(\omega_n,\omega_{n+1}) = 0 \tag{14}$$

ต่อไปจะแสดง $\{\omega_n\}$ คือลำดับโคชี อย่างไรก็ตามจะสมมติว่าไม่ใช่ลำดับโคชี สมมุติว่า $\epsilon > 0$ มีค่า และเป็นจำนวนเต็มบวกตามลำดับ $\{n(k)\}$ และ $\{m(k)\}$ โดยที่

$$n(k) > m(k) > k, d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)}) \geq \epsilon, d(\omega_{n(k)-1},\omega_{m(k)}) < \epsilon \tag{15}$$

จากอสมการสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\epsilon \leq d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)}) \leq d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)-1}) + d(\omega_{n(k)-1},\omega_{m(k)}) < d(\omega_{n(k)},\omega_{n(k)-1}) + \epsilon$$

เมื่อ $k \to \infty$ จากสมการที่ (14) จะได้

$$\lim_{k\to\infty} d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)}) = \epsilon \tag{16}$$

จากอสมการสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\epsilon \leq d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)}) \leq d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)+1}) + d(\omega_{n(k)+1},\omega_{m(k)})$$

และ

$$d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)+1}) \leq d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)}) + d(\omega_{m(k)},\omega_{m(k)+1})$$

เมื่อ $k \to \infty$ จากสมการที่ (11), (12) และ(13) จะได้

$$\lim_{k\to\infty} d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)+1}) = \epsilon \tag{17}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\lim_{k\to\infty} d(\omega_{n(k)+1},\omega_{m(k)}) = \epsilon \tag{18}$$

นอกจากนี้เรายังสังเกตเห็นว่า

$$d(\omega_{n(k)+1},\omega_{m(k)+1}) \leq d(\omega_{n(k)+1},\omega_{m(k)}) + d(\omega_{m(k)},\omega_{m(k)+1})$$

และ

$$d(\omega_{n(k)+1},\omega_{m(k)+1}) \leq d(\omega_{n(k)+1},\omega_{m(k)+1}) + d(\omega_{m(k)},\omega_{m(k)})$$

เมื่อ $k \to \infty$ จากสมการที่ (12), (13)), (14) และ(16) จะได้

$$\lim_{n\to\infty} d(\omega_{n(k)+1},\omega_{m(k)+1}) = \epsilon \qquad (19)$$

จากสมการที่ (14) และ(15) สามารถเลือกจำนวนเต็มบวก $n_0 \geq 1$ โดยที่

$$\frac{1}{2}\left\{D(\omega_{n(k)},\Omega\omega_{n(k)}), D(\omega_{m(k)},\Lambda\omega_{m(k)})\right\} < \frac{\epsilon}{2} < d(\omega_{n(k)},\omega_{m(k)})$$

และในทำนองเดียวกัน

$$\lim_{k\to\infty} \Theta(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)}) = \epsilon \qquad (20)$$

เนื่องจาก $\alpha(\omega_0,\Omega\omega_0) \geq 1$และ Ω,Λ เป็น α-admissible จะได้

$$\alpha(\omega_0,\omega_1) = \alpha(\omega_0,\Omega\omega_0) \geq 1$$

จากสามเหลี่ยม α-admissible จะได้

$$\alpha(\Omega\omega_0,\Lambda\omega_1) = \alpha(\omega_1,\omega_2) \geq 1$$

และ

$$\alpha(\Lambda\Omega\omega_0,\Omega\Lambda\omega_1) = \alpha(\omega_2,\omega_3) \geq 1$$

จากการดำเนินการตามกระบวนการข้างต้น เราได้ข้อสรุปว่า

$\alpha(\omega_n,\omega_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก n ซึ่งพิสูจน์ได้ว่า $\alpha(\omega_n,\omega_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก $m,n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $n < m$ เนื่องจาก

$$\begin{cases}\alpha(\omega_n,\omega_{n+1}) \geq 1, \\ \alpha(\omega_{n+1},\omega_{n+2}) \geq 1\end{cases}$$

แล้วจะได้

$$\alpha(\omega_n,\omega_{n+2}) \geq 1$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{cases}\alpha(\omega_n,\omega_{n+2}) \geq 1, \\ \alpha(\omega_{n+2},\omega_{n+3}) \geq 1\end{cases}$$

อนุมานได้ว่า

$$\alpha(\omega_n,\omega_{n+3}) \geq 1$$

จากกระการดำเนินการ จะได้

$$\alpha(\omega_n,\omega_m) \geq 1$$

สำหรับทุก $m,n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $m > n$ กำหนดให้ $\omega = \omega_{m(k)}, \rho = \omega_{n(k)}$ จากข้างต้นจะได้ว่า

$\alpha(\omega_n,\omega_m) \geq 1$ จะได้ว่า

$$C_G \leq \zeta(L_{m(k)},\beta(W_{m(k)})W_{m(k)}) < G(\beta(W_{m(k)})W_{m(k)},L_{m(k)})$$

โดยที่ $L_{m(k)} = \alpha(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)})\mathrm{H}(\Omega\omega_{m(k)},\Lambda\omega_{n(k)})$

และ $W_{m(k)} = \Theta(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)}) + \mathrm{L}\Psi(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)})$

โดยที่ $\Theta(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)}) = d(\omega_{m(k)},\omega_{n(k)})$ โดย (G_1) จะได้

$$
\begin{aligned}
& d(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)}) \\
& \leq L_{m(k)} < \beta(W_{m(k)})W_{m(k)} < W_{m(k)} \qquad (21) \\
& = d(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)}) + \mathrm{L}\Psi(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)})
\end{aligned}
$$

นำสมการที่ (15), (16) และ $\lim_{n\to\infty} \Psi(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)}) = 0$ แทนลงในสมการที่ (21) จะได้

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)})\mathrm{H}(\Omega\omega_{m(k)}, \Lambda\omega_{n(k)}) = \text{ò}$$

และ

$$\lim_{k\to\infty} \beta(W_{m(k)})W_{m(k)} = \text{ò}$$

โดยที่ $W_{m(k)} = \Theta(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)}) + \mathrm{L}\Psi(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)})$

และจากบทนิยาม 2.35 และ (ζ_2) แทนลงใน $L_{m(k)} = \alpha(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)})\mathrm{H}(\Omega\omega_{m(k)}, \Lambda\omega_{n(k)})$

และ $W_{m(k)} = \Theta(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)}) + \mathrm{L}\Psi(\omega_{m(k)}, \omega_{n(k)})$ จะได้

$$C_G \leq \zeta(L_{m(k)}, \beta(W_{m(k)})W_{m(k)}) < C_G$$

พบว่าเป็นข้อขัดแย้ง และได้ผลลัพธ์ $\{\omega_n\}$ คือลำดับโคชี เนื่องจาก Y สมบูรณ์ ทำให้ได้ว่า $\{\omega_n\}$ ลู่เข้าสู่บางค่า $\omega^* \in \mathrm{Y}$ เป็นต้น

$$\lim_{n\to\infty} d(\omega_n, \omega^*) = 0$$

และ

$$\lim_{n\to\infty} d(\omega_n, \omega^*) = \lim_{n\to\infty} d(\omega_{2n}, \omega^*) = \lim_{n\to\infty} d(\omega_{2n+1}, \omega^*) = 0 \qquad (22)$$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}\min\left\{D(\omega_n, \Omega\omega_n), D(\omega^*, \Lambda\omega^*)\right\} < d(\omega_n, \omega^*)$$

หรือ

$$\frac{1}{2}\min\left\{D(\omega^*, \Omega\omega^*), D(\omega_{n+1}, \Lambda\omega_{n+1})\right\} < d(\omega^*, \omega_{n+1}) \qquad (23)$$

สำหรับทุก $n \in \square$ และ สมมุติว่าไม่เป็นเช่นนั้น แล้วมีค่า $m \in \square$ โดยที่

$$\frac{1}{2}\min\left\{D(\omega_m, \Omega\omega_m), D(\omega^*, \Lambda\omega^*)\right\} \geq d(\omega_m, \omega^*) \qquad (24)$$

และ

$$\frac{1}{2}\min\left\{D(\omega^*, \Omega\omega^*), D(\omega_{m+1}, \Lambda\omega_{m+1})\right\} \geq d(\omega^*, \omega_{m+1}) \qquad (25)$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
&2d(\omega_m,\omega^*)\\
&\le \min\left\{D(\omega_m,\Omega\omega_m), D(\omega^*,\Lambda\omega^*)\right\}\\
&\le \min\left\{d(\omega_m,\omega^*)+D(\omega^*,\Omega\omega_m), D(\omega^*,\Lambda\omega^*)\right\}\\
&\le d(\omega_m,\omega^*)+D(\omega^*,\Omega\omega_m) \le d(\omega_m,\omega^*)+d(\omega^*,\omega_{m+1})
\end{aligned}
$$

ซึ่งหมายความว่า

$$d(\omega_m,\omega^*) \le d(\omega^*, d\omega_{m+1}) \tag{26}$$

จากสมการ (23) และ (24)

$$
\begin{aligned}
&d(\omega_m,\omega^*)\\
&\le d(\omega_{m+1},\omega^*) \qquad (27)\\
&\le \frac{1}{2}\min\left\{D(\omega^*,\Omega\omega^*), D(\omega_{m+1},\Lambda\omega_{m+1})\right\}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\frac{1}{2}\min\left\{D(\omega_m,\Omega\omega_m), D(\omega^*,\Lambda\omega^*)\right\} < d(\omega_m,\omega_{m+1})$ จากสมการที่ (2) จะได้

$$C_G \le \zeta(L_m, \beta(W_m)W_m) < G(\beta(W_m)W_m, L_m)$$

โดยที่ $L_m = \alpha(\omega_m,\omega_{m+1})H(\Omega\omega_m,\Lambda\omega_{m+1})$ และ $W_m = \Theta(\omega_m,\omega_{m+1}) + L\Psi(\omega_m,\omega_{m+1})$

จะได้ว่า

$$d(\omega_{m+1},\omega_{m+2}) \le L_m < \beta(W_m)W_m < W_m \tag{28}$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
&\Theta(\omega_m,\omega_{m+1})\\
&= \max\left\{d(\omega_m,\omega_{m+1})D(\omega_m,\Omega\omega_m), D(\omega_{m+1},\Lambda\omega_{m+1}), \frac{D(\omega_m,\Lambda\omega_{m+1})+D(\omega_{m+1},\Omega\omega_m)}{2}\right\}\\
&\le \max\left\{d(\omega_m,\omega_{m+1}), d(\omega_m,\omega_{m+1}), d(\omega_{m+1},\omega_{m+2}), \frac{d(\omega_m,\omega_{m+2})+d(\omega_{m+1},\omega_{m+1})}{2}\right\}\\
&= \max\left\{d(\omega_m,\omega_{m+1}), d(\omega_{m+1},\omega_{m+2}), \frac{d(\omega_m,\omega_{m+2})}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
&\frac{d(\omega_m,\omega_{m+2})}{2}\\
&\le \frac{d(\omega_m,\omega_{m+1})+d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})}{2}\\
&\le \max\left\{d(\omega_m,\omega_{m+1}), d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})\right\}
\end{aligned}
$$

ซึ่ง

$$\Theta(\omega_m,\omega_{m+1}) \le \max\left\{d(\omega_m,\omega_{m+1}), d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})\right\}$$

และ $\Psi(\omega_m,\omega_{m+1}) = 0$

สมมุติว่า $\max\{d(\omega_m,\omega_{m+1}),d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})\}=d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})$
และจากสมการที่ (28) จะได้ว่า

$$d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})<d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง จึงสรุปได้ว่า

$$\max\{d(\omega_m,\omega_{m+1}),d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})\}=d(\omega_m,\omega_{m+1})$$

จากสมการที่ (26) จะได้ว่า

$$d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})<d(\omega_m,\omega_{m+1}) \tag{29}$$

จากสมการที่ (27),(28) และ (29) จะได้

$$\begin{aligned}
&d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})\\
&<d(\omega_m,\omega_{m+1})\\
&\le d(\omega_m,\omega^*)+d(\omega^*,\omega_{m+1})\\
&\le \frac{1}{2}\min\left\{D(\omega^*,\Omega\omega^*),D(\omega_{m+1},\Lambda\omega_{m+1})\right\}+\frac{1}{2}\min\left\{D(\omega^*,\Omega\omega^*),D(\omega_{m+1},\Lambda\omega_{m+1})\right\}\\
&=\min\left\{D(\omega^*,\Omega\omega^*),D(\omega_{m+1},\Lambda\omega_{m+1})\right\}\\
&\le d(\omega_{m+1},\omega_{m+2})
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง สำหรับทุก $n\ge 2$ จะได้

$$\frac{1}{2}\min\left\{D(\omega_n,\Omega\omega_n),D(\omega^*,\Lambda\omega^*)<d(\omega_n,\omega^*)\right\}$$

จากสมการที่ (3)

$$\mathcal{C}_G \le \zeta(L_n,\beta(W_n)W_n)<G(\beta(W_n)W_n,L_n) \tag{30}$$

โดยที่ $L_n=\alpha(\omega_n,\omega^*)H(\Omega\omega_n,\Lambda\omega^*)$ และ $W_n=\Theta(\omega_n,\omega^*)+L\Psi(\omega_n,\omega^*)$
ในทำนองเดียวกันจะได้

$$D(\omega_{n+1},\Lambda\omega^*)\le L_n<W_n \tag{31}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
&\Theta(\omega_n,\omega^*)\\
&=\max\{d(\omega_m,\omega^*)D(\omega_n,\Omega\omega_n),D(\omega^*,\Lambda\omega^*),\frac{D(\omega_n,\Lambda\omega^*)+D(\omega^*,\Omega\omega_n)}{2}\}\\
&\le \max\{d(\omega_n,\omega^*),d(\omega_n,\omega_{n+1}),D(\omega^*,\Lambda\omega^*),\frac{D(\omega_n,\Lambda\omega^*)+d(\omega^*,\omega_{n+1})}{2}\}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
&\Psi(\omega_n,\omega^*)\\
&=\min\{D(\omega_n,\Omega\omega_n),D(\omega^*,\Lambda\omega^*),D(\omega_n,\Lambda\omega^*),D(\omega^*,\Omega\omega_n)\}\\
&=\min\{d(\omega_n,\omega_{n+1}),D(\omega^*,\Lambda\omega^*),D(\omega_n,\Lambda\omega^*),D(\omega^*,\Omega\omega_n)\}
\end{aligned}$$

กำหนดให้ $n \to \infty$ และใชสมการที่ (14) และ (22) จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \Theta(\omega_n, \omega^*) = D(\omega^*, \Lambda\omega^*), \ \lim_{n\to\infty} \Psi(\omega_n, \omega^*) = 0 \tag{32}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\omega^* \in \Lambda\omega^*$ สมมุติว่า $D(\omega^*, \Lambda\omega^*) > 0$ จากสมการที่ (31) กำหนดให้ $n \to \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
&D(\omega^*, \Lambda\omega^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} D(\omega_{n+1}, \Lambda\omega^*) \\
&\le \lim_{n\to\infty} \alpha(\omega_n, \omega^*) \mathrm{H}(\Omega\omega_n, \Lambda\omega^*) \\
&< \lim_{n\to\infty} \Theta(\omega_n, \omega^*) + \mathrm{L} \lim_{n\to\infty} \Psi(\omega_n, \omega^*) \\
&= D(\omega^*, \Lambda\omega^*)
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\omega^* \in \Lambda\omega^*$ ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\omega^* \in \Omega\omega^*$ ซึ่ง Ω และ Λ มีจุดตรึงร่วมกัน

บทแทรก 4.2 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ และ $\Omega : \mathrm{Y} \to CB(\mathrm{Y})$ คือการหดตัว□ แบบ Suzuki ทั่วไปหลายค่า กับ ζ

$\frac{1}{2}\min\{D(\omega, \Omega\omega), D(\rho, \Lambda\rho)\} < d(\omega, \rho) \Rightarrow \zeta(H(\Omega\omega, \Lambda\rho), \Theta(\omega, \rho)) \ge 0$ สำหรับทุก $\omega, \rho \in \mathrm{Y}$

โดยที่

$$\Theta(\omega, \rho) = \max\left\{d(\omega, \rho), D(\omega, \Omega\omega), D(\rho, \Lambda\rho), \frac{D(\omega, \Lambda\rho) + D(\rho, \Omega\omega)}{2}\right\}$$

ดังนั้น Ω และ Λ มีจุดตรึงร่วมกัน

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.14 จะได้ว่า $\alpha(\omega, \rho) = 1, \beta(v) = v$ และ $\Psi(\omega, \rho) = 0$

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดให้ $X = \{0, 3, 5\}$ เป็นปริภูมิเมตริก และ $\Omega, \Lambda : \mathrm{Y} \to CB(\mathrm{Y})$ นิยามโดย

$$\Omega\omega = \begin{cases} \left\{\dfrac{\omega}{7}\right\} & if \quad \omega \in \{0, 5\} \\ \left\{0, \dfrac{1}{7}\right\} & if \quad \omega = 3, \end{cases}$$

และ $\Lambda\omega = \left\{\dfrac{\omega}{5}\right\}$ สำหรับทุก $\omega \in \mathrm{Y}$

กำหนดให้ $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \to □$ โดย $\zeta(t, s) = \frac{6}{7}u - v$ สำหรับทุก $u, v \in [0, \infty)]$ จากอสมการที่ (2)

สำหรับทุก $\omega, \rho \in \mathrm{Y}$ ซึ่ง $\Omega\omega \ne \Lambda\rho$ จะได้ $\frac{1}{2}\min\{D(\omega, \Omega\omega), D(\omega, \Lambda\omega)\} < d(\omega, \rho)$ โดยที่

$$(\omega, \rho) \in \{(0,3), (3,0), (0,5), (5,0), (3,5), (5,3)\}$$

จากสมการที่ (2) จะได้

$$\zeta(\mathrm{H}(\Omega\omega,\Lambda\rho),\Theta(\omega,\rho))=\frac{6}{7}\Theta(\omega,\rho)-\mathrm{H}(\Omega\omega,\Lambda\rho)\geq 0$$

นั่นหมายความว่า

$$\mathrm{H}(\Omega\omega,\Lambda\rho)\leq \frac{6}{7}\Theta(\omega,\rho)$$

กรณี (i) สำหรับ $\omega=0,\rho=2;$

$$\mathrm{H}(\Omega 0,\Lambda 3)=\mathrm{H}(\{0\},\left\{\frac{2}{3}\right\})=\frac{2}{3}\leq\frac{6}{7}\Theta(0,3)$$

กรณี (ii) สำหรับ $\omega=3,\rho=0;$

$$\mathrm{H}(\Omega 3,\Lambda 0)=\mathrm{H}(\left\{0,\frac{2}{7}\right\},\{0\})=\frac{2}{7}\leq\frac{6}{7}\Theta(2,0)$$

กรณี (iii)สำหรับ $\omega=0,\rho=5;$

$$\mathrm{H}(\Omega 0,\Lambda 5)=\mathrm{H}(\{0\},\{2\})=2\leq\frac{6}{7}\Theta(0,5)$$

กรณี (iv)สำหรับ $\omega=5,\rho=0;$

$$\mathrm{H}(\Omega 5,\Lambda 0)=\mathrm{H}(\left\{\frac{3}{4}\right\},\{0\})=\frac{3}{4}\leq\frac{6}{7}\Theta(5,0)$$

กรณี (v) สำหรับ $\omega=3,\rho=5;$

$$\mathrm{H}(\Omega 3,\Lambda 5)=\mathrm{H}(\left\{0,\frac{2}{7}\right\},\{1\})=1\leq\frac{6}{7}\Theta(2,4)$$

กรณี (vi)สำหรับ $\omega=5,\rho=3;$

$$\mathrm{H}(\Omega 5,\Lambda 3)=\mathrm{H}(\left\{\frac{3}{4}\right\},\left\{\frac{2}{3}\right\})=\frac{2}{7}\leq\frac{6}{7}\Theta(4,2)$$

บทแทรก 4.2 กำหนดให้ (X,d) เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ และ $\Omega:\mathrm{Y}\to C\mathrm{B}(\mathrm{Y})$ คือการหดตัว□ แบบ Suzuki ทั่วไปหลายค่า กับ ζ

$\frac{1}{2}D(\omega,\Omega\omega)<d(\omega,\rho)\ \Rightarrow\zeta(\mathrm{H}(\Omega\omega,\Omega\rho),\Theta(\omega,\rho))\geq 0$ สำหรับทุก $\omega,\rho\in\mathrm{Y}$ เมื่อ $\omega\neq\rho$

โดยที่

$$\Theta(\omega,\rho)=\max\{d(\omega,\rho),D(\omega,\Omega\omega),D(\rho,\Omega\rho),\frac{D(\omega,\Omega\rho)+D(\rho,\Omega\omega)}{2}\}$$

ดังนั้น Ω เป็นจุดตรึง

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.14 จะได้ว่า $\alpha(\omega,\rho)=1,\beta(v)=v$ และ $\Psi(\omega,\rho)=0$