บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

การประมาณค่าจุดตรึงโดยกระบวนการวนซ้ำสำหรับการดำเนินการแบบไม่เชิงเส้นเป็นปัญหาใหม่ที่น่าสนใจในการศึกษาค้นคว้า และสามารถศึกษาได้จากตัวอย่างงานวิจัย เช่น สำหรับการหาจุดตรึงเฉพาะของการส่งแบบหดตัวซึ่งการส่งแบบหดตัวที่เป็นที่รู้จักก็คือ หลักการหดตัวของบานาค ซึ่งนิยามดังนี้
ให้ $\mathcal{X}$ เป็นปริภูมิบานาคและ $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิบานาค จะกล่าวว่าการส่ง $\mathcal{T}$ เป็นการส่งแบบหดตัว (Abdeljawad, Ullah, & Ahmad, 2020 : 1-7, Abdeljawad, T. et al. 2020 : 1-6) ถ้าสำหรับทุก $\eta, \delta \in \mathcal{C}$ แล้ว

$$\|\mathcal{T}\eta - \mathcal{T}\delta\| \leq \kappa\|\eta - \delta\|$$

โดยที่ $\kappa \in (0,1)$ ซึ่งจุด $v \in \mathcal{C}$ เรียกว่าจุดตรึงสำหรับ $\mathcal{T}$ ถ้า $v = \mathcal{T}v$ เซตของจุดตรึงทั้งหมดของการส่ง $\mathcal{T}$ คือ $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ และเซตของจำนวนนับทั้งหมด คือ $\mathbb{N}$ การส่ง $\mathcal{T}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย ถ้าสำหรับทุก $\eta, \delta \in \mathcal{C}$ แล้ว

$$\|\mathcal{T}\eta - \mathcal{T}\delta\| \leq \|\eta - \delta\|$$

ถ้า $\mathcal{X}$ เป็นปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป และ $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อยที่ คอนเวกซ์ ปิด มีขอบเขต แล้ว $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ จะเป็นเซตไม่ว่าง ในปี 2008 นักวิจัยชาวญี่ปุ่นชื่อ Suzuki ได้นำเสนอคลาสใหม่ของการส่งแบบไม่เชิงเส้นซึ่งมีรูปแบบทั่วไปยิ่งกว่าการส่งแบบไม่ขยาย นั่นคือการส่งแบบเงื่อนไข $(\mathcal{C})$ (การส่งแบบ Suzuki) จะกล่าวว่าการส่ง $\mathcal{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ เป็นการส่งแบบเงื่อนไข $(\mathcal{C})$ (การส่งแบบ Suzuki) ถ้าสำหรับทุก $\eta, \delta \in \mathcal{C}$ แล้ว

$$\frac{1}{2}\|\eta - \mathcal{T}\eta\| \leq \|\eta - \delta\| \Rightarrow \|\mathcal{T}\eta - \mathcal{T}\delta\| \leq \|\eta - \delta\|$$

(Suzuki, 2008 : 1088-1095)

หลังจากนั้นในปี 2011 ได้มีงานวิจัยที่ขยายเงื่อนไขแบบ $(\mathcal{C})$ ให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปมากยิ่งขึ้น นั่นคือการส่งแบบเงื่อนไข $(\mathcal{E}_\mu)$ จะกล่าวว่าการส่ง $\mathcal{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ เป็นการส่งแบบเงื่อนไข $(\mathcal{E}_\mu)$ ถ้ามีบาง $\mu \geq 1$ สำหรับทุก $\eta, \delta \in \mathcal{C}$ แล้ว

$$\|\mathcal{T}\eta - \delta\| \leq \mu\|\mathcal{T}\delta - \delta\| + \|\eta - \delta\|$$

(García-Falset, Llorens-Fuster, & Suzuki, 2011 : 185-195)

จะกล่าวว่าการส่ง $\mathcal{T}$ เป็นการส่งแบบเงื่อนไข $(\mathcal{E}_\mu)$ (การส่งแบบ García-Falset) เมื่อมีบาง $\mu \geq 1$ เห็นได้ชัดว่า การส่งแบบ Suzuki เป็นการส่งแบบเงื่อนไข $(\mathcal{E})$ ด้วย $\mu = 3$ ดังนั้นคลาสของการส่งแบบ Garcia-Falset ประกอบด้วยคลาสอื่น ๆ จำนวนมากของการส่งแบบไม่ขยายทั่วไป (Pandey, R. et al. 2018 : 1-24)

ต่อมาได้มีการใช้เทคนิคกระบวนการวนซ้ำแบบ Picard ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C}, \\ \eta_{n+1} = \mathcal{T}\eta_n \end{cases} \tag{1.1}$$

(Picard, 1890 : 145-210) มาใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบหดตัวและได้แสดงว่ามีจุดตรึงเพียงค่าเดียวเท่านั้นสำหรับการส่งแบบหดตัว ในทางกลับกัน เทคนิคกระบวนการวนซ้ำแบบ Picard ไม่จำเป็นต้องลู่เข้าสู่จุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย จึงทำให้มีนักวิจัยจำนวนมากให้ความสนใจศึกษาค้นคว้า ทำการวิจัยและนำเสนอกระบวนการวนซ้ำหลากหลายรูปแบบที่ใช้ในการประมาณค่าจุดตรึง ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่จุดตรึงภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมเพื่อยืนยันการมีคำตอบของกระบวนการวนซ้ำที่สร้างขึ้น

ในโครงการวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยวิจัยได้สร้างกระบวนการวนซ้ำขึ้นมาใหม่โดยให้ชื่อว่า กระบวนการวนซ้ำแบบ SP^* ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C}, \\ \zeta_n = \mathcal{T}((1-\iota_n)\eta_n + \iota_n \mathcal{T}\eta_n), \\ \vartheta_n = \mathcal{T}((1-\tau_n)\zeta_n + \tau_n \mathcal{T}\zeta_n), \\ \eta_{n+1} = \mathcal{T}((1-\sigma_n)\vartheta_n + \sigma_n \mathcal{T}\vartheta_n), \end{cases} \tag{1.2}$$

เมื่อลำดับ $\{\iota_n\}$, $\{\tau_n\}$ และ $\{\sigma_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ ซึ่ง $0 < a \leq \iota_n, \tau_n, \sigma_n \leq b < 1$ สำหรับทุก $n \geq 1$

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อสร้างกระบวนการวนซ้ำสำหรับการประมาณค่าของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาค

2. เพื่อสร้างทฤษฎีบทของการลู่เข้าภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับการประมาณค่าของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาค

3. เพื่อตรวจสอบทฤษฎีบทของการลู่เข้าโดยใช้ตัวอย่างภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับการประมาณค่าของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาค

ประโยชน์ของการวิจัย

1. ได้กระบวนการวนซ้ำสำหรับการประมาณค่าของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาค
2. ได้ทฤษฎีของการลู่เข้าภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม
3. ได้การดำเนินการที่ใช้แก้ไขปัญหาการประมวลผลสัญญาณให้ดีขึ้น
4. ได้ผลลัพธ์การลู่เข้าที่ดีขึ้นโดยการใช้ตัวอย่างภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม

ขอบเขตของการวิจัย

ขอบเขตของการวิจัยคือ การสร้างการวนซ้ำเพื่อการประมาณค่าของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิบานาค

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. $\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{v \in \mathcal{C} \mid \mathcal{T}v = v\}$ แทนเซตจุดตรึงของการส่ง $\mathcal{T}$

2. ปริภูมิเชิงเส้นอิงนอร์ม หมายถึง ปริภูมิเชิงเส้น $\mathcal{X}$ ซึ่งทุก ๆ เวกเตอร์ $v \in \mathcal{C}$ จะมี จำนวนจริงแทนด้วย $\|v\|$ ซึ่งเรียกว่า นอร์ม ของ v ซึ่งมีสมบัติว่า

(1) $\|v\| \geq 0$

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ เมื่อ $\alpha \in \mathbb{R}$

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

3. ปริภูมิบานาค หมายถึง ปริภูมิอิงนอร์มบริบูรณ์