บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนิยามและทฤษฎีบท

บทนิยาม 2.1 ให้ $\mathcal{X}$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $u, v \in \mathcal{X}$ สามารถหาผลบวกผ่านกระบวนการที่เรียกว่าการบวกซึ่งทำให้ $u + v = w \in \mathcal{X}$ และมีสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(2) $u + v = v + u$

(3) จะมีสมาชิกเพียงสมาชิกเดียวใน $\mathcal{X}$ แทนด้วย 0 ซึ่งมีสมบัติว่า $u + 0 = u$ สำหรับทุก $u \in \mathcal{X}$ เรียกสมาชิก 0 ว่า สมาชิกศูนย์

(4) สำหรับทุก $u \in \mathcal{X}$ จะมีสมาชิก $-u \in \mathcal{X}$ ซึ่งมีสมบัติว่า $u + (-u) = 0$ เรียกสมาชิก $-x$ ว่าค่าลบของ u

ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ และ $u \in \mathcal{X}$ แล้ว $\alpha u \in \mathcal{X}$ เรียกกระบวนการนี้ว่า การคูณด้วยสเกลาร์ และมีสมบัติดังต่อไปนี้

(5) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

(6) $1 \cdot u = u$

(7) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

(8) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

สัจพจน์ดังกล่าวข้างต้นนี้เรียกว่า ปริภูมิเชิงเส้น บางครั้งจะเรียก ปริภูมิเชิงเส้น ว่า ปริภูมิเวกเตอร์

บทนิยาม 2.2 ให้ $\mathcal{X}$ เป็นปริภูมิอิงนอร์มและให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{X}$ ดังนั้นเซต $\mathcal{C}$ จะเรียกว่าคอนเวกซ์ ถ้าสำหรับ $u, v \in \mathcal{C}$ และ $\eta \in (0, 1)$ แล้ว

$$\eta u + (1 - \eta)v \in \mathcal{C}$$

การส่งเชิงเส้น หรือ ตัวดำเนินการเชิงเส้น ระหว่างปริภูมิเชิงเส้นเชิงจริง $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ เป็นฟังก์ชัน $\mathcal{T} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ สำหรับทุก $\tau, \iota \in \mathbb{R}$ และ $u, v \in \mathcal{X}$ ซึ่ง

$$\mathcal{T}(\tau u + \iota v) = \tau \mathcal{T} u + \iota \mathcal{T} v$$

บทนิยาม 2.3 ให้ $\mathcal{X}$ และ $\mathcal{Y}$ เป็นปริภูมิเชิงเส้นอิงนอร์ม การส่งเชิงเส้น $\mathcal{T}:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ กล่าวว่า มีขอบเขต ถ้ามีค่าคงที่ $M\geq 0$ สำหรับทุก $u\in\mathcal{X}$ ซึ่ง

$$\|\mathcal{T}u\|\leq M\|u\|$$

เขียนแทนเซตของการส่งเชิงเส้นทั้งหมด $\mathcal{T}:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ โดย $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ และเซตของการส่งเชิงเส้นที่มีขอบเขตทั้งหมด $\mathcal{T}:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ โดย $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ เมื่อโดเมนและเรนจ์เป็นเซตเดียวกัน

บทนิยาม 2.4 ถ้า $\{\mathcal{T}_n\}$ เป็นลำดับของตัวดำเนินการใน $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ และ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\|\mathcal{T}_n-\mathcal{T}\|=0$ สำหรับบาง $\mathcal{T}\in\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ แล้ว $\mathcal{T}_n$ ลู่เข้าเอกรูปสู่ $\mathcal{T}$

บทนิยาม 2.5 ลำดับ$\{\mathcal{T}_n\}$ ใน $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ ลู่เข้าแบบเข้ม ถ้าสำหรับทุก $u\in\mathcal{X}$ ซึ่ง

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathcal{T}_n u=\mathcal{T}u$$

บทนิยาม 2.6 ถ้า $\mathcal{T}_n$ ลู่เข้าเอกรูปสู่ $\mathcal{T}$ แล้ว $\mathcal{T}_n$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\mathcal{T}$

บทนิยาม 2.7 ค่าสเกลาร์ของการส่งเชิงเส้นจากปริภูมิเชิงเส้น $\mathcal{X}$ ไป $\mathbb{R}$ เรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น หรือ รูปแบบเชิงเส้นบน $\mathcal{X}$ ปริภูมิของฟังก์ชันเชิงเส้นบน $\mathcal{X}$ เรียกว่า ปริภูมิควบคู่เชิงพีชคณิต หรือเรียกว่า ปริภูมิควบคู่ของ $\mathcal{X}$ เขียนแทนด้วย $\mathcal{X}^*$

บทนิยาม 2.8 ลำดับ $\{\eta_n\}$ ในปริภูมิบานาค $\mathcal{X}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ ω เขียนแทนด้วย $\eta_n\rightharpoonup\omega$ เมื่อ $n\longrightarrow\infty$ ถ้า $\mathcal{T}(\eta_n)\longrightarrow\mathcal{T}(\omega)$ เมื่อ $n\longrightarrow\infty$ สำหรับทุกฟังก์ชันเชิงเส้น $\mathcal{T}$ ใน $\mathcal{X}^*$

ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่าง ปิด คอนเวกซ์ ของปริภูมิบานาค $\mathcal{X}$ และให้ $\{\eta_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน $\mathcal{X}$ สำหรับทุก $\rho\in\mathcal{X}$ จะได้ว่า $r(\rho,\{\eta_n\})=\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty}\|\eta_n-\rho\|$ รัศมีเส้นกำกับของ $\{\eta_n\}$ เกี่ยวข้องกับ $\mathcal{C}$ โดย $r(\mathcal{C},\{\eta_n\})=\inf\{r(\rho,\{\eta_n\}):\rho\in\mathcal{C}\}$ และศูนย์กลางเส้นกำกับของ $\{\eta_n\}$ เกี่ยวข้องกับ $\mathcal{C}$ โดย

$$\mathcal{A}(\mathcal{C},\{\eta_n\})=\{\rho\in\mathcal{C}:r(\rho,\{\eta_n\})=r(\mathcal{C},\{\eta_n\})\}$$

เป็นที่ทราบกันดีว่าในปริภูมิบานาคเอกรูปประกอบด้วย $\mathcal{A}(\mathcal{C},\{\eta_n\})$ เพียงจุดเดียว

จะกล่าวว่าปริภูมิบานาค $\mathcal{X}$ มีสมบัติ Opial (Opial, 1967 : 591-598) ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $\{\eta_n\}$ ใน $\mathcal{C}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $\omega\in\mathcal{X}$

บทตั้ง 2.1 (García-Falset, Llorens-Fuster, & Suzuki, 2011 : 185-195) ให้ $\mathcal{T}$ เป็นการส่งบนเซตย่อย $\mathcal{C}$ ของปริภูมิบานาค $\mathcal{X}$ มีสมบัติ Opial สมมติว่า $\mathcal{T}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $(\mathcal{E})$ ถ้า $\{\eta_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ ω และ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\|\mathcal{T}\eta_n-\eta_n\|=0$ แล้ว $\omega\in\mathcal{F}(\mathcal{T})$

บทตั้ง 2.2 (García-Falset, Llorens-Fuster, & Suzuki, 2011 : 185-195) ให้ $\mathcal{T}$ เป็นการส่งบนเซตย่อย $\mathcal{C}$ ของปริภูมิบานาค ถ้า $\mathcal{T}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $(\mathcal{E})$ แล้วสำหรับทุก $v \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ และ $\rho \in \mathcal{C}$ จะได้ว่า

$$\|\mathcal{T}\rho - v\| \leq \|\rho - v\|$$

บทตั้ง 2.3 (García-Falset, Llorens-Fuster, & Suzuki, 2011 : 185-195) ให้ $\mathcal{T}$ เป็นการส่งบนเซตย่อย $\mathcal{C}$ ของปริภูมิบานาค $\mathcal{X}$ ถ้า $\mathcal{T}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $(\mathcal{C})$ แล้ว $\mathcal{T}$ ตรงตามเงื่อนไข $(\mathcal{E}_\mu)$ ด้วย $\mu = 3$

บทตั้ง 2.4 (Schu, 1991 : 153-159) ให้ $\mathcal{X}$ เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป และ $0 < a \leq \sigma_n \leq b < 1$ สำหรับทุก $n \geq 1$ ถ้า $\{\eta_n\}$ และ $\{\delta_n\}$ เป็นสองลำดับใน $\mathcal{X}$ ซึ่ง $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|\eta_n\| \leq \lambda,$ $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|\delta_n\| \leq \lambda$ และ $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\sigma_n\eta_n + (1-\sigma_n)\delta_n\| = \lambda$ สำหรับบาง $\lambda \geq 0$ แล้ว $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\eta_n - \delta_n\| = 0$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กระบวนการวนซ้ำถูกนำเสนอโดยนักวิจัยที่มีชื่อเสียงและเป็นที่ยอมรับในงานวิจัยด้านนี้ได้แก่ กระบวนการวนซ้ำแบบ S ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C} \\ \zeta_n = (1-\iota_n)\eta_n + \iota_n\mathcal{T}\eta_n \\ \eta_{n+1} = (1-\tau_n)\mathcal{T}\eta_n + \tau_n\mathcal{T}\zeta_n \end{cases} \tag{2.1}$$

เมื่อลำดับ $\{\iota_n\}$ และ $\{\tau_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ (Agarwal, O'Regan, & Sahu, 2007 : 61-79)

กระบวนการวนซ้ำแบบ SP ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C} \\ \zeta_n = (1-\iota_n)\eta_n + \iota_n\mathcal{T}\eta_n \\ \vartheta_n = (1-\tau_n)\zeta_n + \tau_n\mathcal{T}\zeta_n \\ \eta_{n+1} = (1-\sigma_n)\vartheta_n + \sigma_n\mathcal{T}\vartheta_n \end{cases} \tag{2.2}$$

เมื่อลำดับ $\{\iota_n\}$ และ $\{\tau_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ (Phuengrattana & Suantai, 2011 : 3006-3014)

กระบวนการวนซ้ำแบบ Thakur ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C} \\ \zeta_n = (1-\iota_n)\eta_n + \iota_n \mathcal{T}\eta_n \\ \vartheta_n = \mathcal{T}((1-\tau_n)\eta_n + \tau_n\zeta_n) \\ \eta_{n+1} = \mathcal{T}\vartheta_n \end{cases} \tag{2.3}$$

เมื่อลำดับ $\{\iota_n\}$ และ $\{\tau_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ (Thakur, Thakur, & Postolache, 2016 :147-155)

กระบวนการวนซ้ำแบบ K ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C} \\ \zeta_n = (1-\iota_n)\eta_n + \iota_n \mathcal{T}\eta_n \\ \vartheta_n = \mathcal{T}((1-\tau_n)\mathcal{T}\eta_n + \tau_n\mathcal{T}\zeta_n) \\ \eta_{n+1} = \mathcal{T}\vartheta_n \end{cases} \tag{2.4}$$

เมื่อลำดับ $\{\iota_n\}$ และ $\{\tau_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ (Hussain, Ullah, & Arshad, 2018 : 1383-1393)

กระบวนการวนซ้ำแบบ K^* ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C} \\ \zeta_n = (1-\iota_n)\eta_n + \iota_n \mathcal{T}\eta_n \\ \vartheta_n = \mathcal{T}((1-\tau_n)\zeta_n + \tau_n\mathcal{T}\zeta_n) \\ \eta_{n+1} = \mathcal{T}\vartheta_n \end{cases} \tag{2.5}$$

เมื่อลำดับ $\{\iota_n\}$ และ $\{\tau_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ (Ullah & Arshad, 2018 : 87-100)

กระบวนการวนซ้ำแบบ AK ซึ่งนิยามดังนี้

$$\begin{cases} \eta_0 \in \mathcal{C} \\ \zeta_n = \mathcal{T}((1-\iota_n)\eta_n + \iota_n \mathcal{T}\eta_n) \\ \vartheta_n = \mathcal{T}((1-\tau_n)\zeta_n + \tau_n\mathcal{T}\zeta_n) \\ \eta_{n+1} = \mathcal{T}\vartheta_n \end{cases} \tag{2.6}$$

เมื่อลำดับ $\{\iota_n\}$ และ $\{\tau_n\}$ เป็นลำดับที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ (Ullah, K. et al. 2020 : 2050141)