

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

หลายทศวรรษที่ผ่านมา ประเทศต่าง ๆ ทั่วโลกประสบปัญหาการขาดแคลนเชื้อเพลิงเพิ่มมากขึ้น อันมีสาเหตุมาจากการเติบโตอย่างรวดเร็วของภาคอุตสาหกรรมและสังคมยานยนต์ ประกอบกับปัญหาด้านมลพิษทางสิ่งแวดล้อม รัฐบาลและภาคอุตสาหกรรมต่าง ๆ จึงเล็งเห็นความสำคัญต่อการศึกษาและลงทุนด้านพลังงานทางเลือกเพิ่มมากขึ้น เช่น การสร้างโรงกลั่นชีวภาพที่เป็นมิตรต่อสิ่งแวดล้อม การส่งเสริมการผลิตพลังงานทดแทน เป็นต้น จากแนวคิดดังกล่าวได้รับความสนใจจากนักวิทยาศาสตร์ในสาขาต่าง ๆ ในการพัฒนาพลังงานทดแทนที่สะอาดจากแหล่งที่ยั่งยืน เพื่อตอบสนองต่อความต้องการด้านสิ่งแวดล้อมเพิ่มมากขึ้น เช่น ชีวมวล สารเคมีขั้นต้น หรือพลังงานชีวภาพ (Stichnothe H., (2011), Palmarola-Adrados B., (2005)) กระบวนการที่อ้างอิงการแปลงชีวมวลไปเป็นวัสดุชีวภาพที่สามารถนำมาใช้งานได้ อาจเป็นทางเลือกหนึ่ง que เพิ่มมูลค่าทางเศรษฐกิจของวัตถุดิบที่ถูกนำไปทิ้งในปัจจุบัน อีกทั้งยังสามารถช่วยลดปริมาณน้ำเสียที่ปล่อยลงสู่แม่น้ำลำคลองของภาคอุตสาหกรรมต่าง ๆ ได้อีกด้วย

ไบโอเอทานอล คือ หนึ่งในเชื้อเพลิงหมุนเวียนที่สำคัญที่สุดและช่วยลดผลกระทบต่อสิ่งแวดล้อมจากการใช้เชื้อเพลิงฟอสซิลที่มีแหล่งกำเนิดมาจากฟอสซิลทั่วโลก เราสามารถผสมเอทานอลลงในน้ำมันเบนซินเพื่อลดต้นทุนและนำมาเป็นเชื้อเพลิงในภาคการขนส่งได้ พร้อมทั้งยังช่วยลดจำนวนก๊าซเรือนกระจกที่ปล่อยสู่ชั้นบรรยากาศได้อีกด้วย (Kaparaju P., et al. (2009)) ไบโอเอทานอลยังเป็นเชื้อเพลิงชีวภาพเหลวทดแทนที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดอย่างแท้จริงเพื่อเข้ามาแทนที่เชื้อเพลิงฟอสซิล ในปัจจุบันมนุษย์ได้นำพืชผลทางการเกษตรมาใช้เป็นสารตั้งต้นสำหรับการสังเคราะห์เอทานอล เช่น ข้าวฟ่าง ข้าวโพด อ้อย ข้าวสาลี เป็นต้น การศึกษาการทำงานของการผลิตเชื้อเพลิงเอทานอลในเครื่องปฏิกรณ์ชีวภาพนั้น อาศัยความเข้าใจเรื่องอัตราการเติบโตของสารชีวมวลเป็นหลัก ซึ่งสามารถอธิบายได้โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ มีแบบจำลองต่าง ๆ ที่ตรวจสอบจลนศาสตร์ของการเติบโตของมวลเซลล์ในเครื่องปฏิกรณ์ชีวภาพและแบบจำลองส่วนใหญ่เหล่านี้นำเสนอรูปแบบสำหรับอัตราการเติบโตจำเพาะของมวลเซลล์ (Kaparaju P., et al. (2009), Aimaretti N.R., et al. (2012)) นักวิทยาศาสตร์หลายคนให้ความสนใจที่จะศึกษาพฤติกรรมระยะยาวของแบบจำลองต่าง ๆ ที่ถูกสร้างขึ้นซึ่งรวมถึงเครื่องปฏิกรณ์การไหลแบบต่อเนื่อง (Njoku S.A., et al. (2012), Isla M.A., et al. (2013))

จังหวัดจันทบุรีเป็นจังหวัดที่มีเกษตรกรรมเป็นพื้นฐานของระบบเศรษฐกิจ โดยผลิตภัณฑ์มวลรวมภายในจังหวัดเกินกว่าครึ่งมาจากภาคเกษตรกรรม รองลงมาเป็นภาคอุตสาหกรรม การก่อสร้าง การศึกษา และภาคส่วนอื่น ๆ ตามลำดับ มีเนื้อที่ประมาณ 6,400 ตารางกิโลเมตร สภาพภูมิประเทศประกอบไปด้วยป่าไม้ ภูเขา ที่ราบสูง ที่ราบลุ่มแม่น้ำ และที่ราบชายฝั่งทะเล มีอาณาเขตติดต่อกับจังหวัดฉะเชิงเทรา สระแก้ว ตราด ระยอง ชลบุรี ทะเลอ่าวไทย และประเทศกัมพูชา ประชากรส่วนใหญ่ของจังหวัดจันทบุรีอาศัยอยู่ทางตอนใต้ของจังหวัด โดยนิยมประกอบอาชีพเกษตรกรรม และการทำประมง รวมไปถึงการเพาะเลี้ยงสัตว์น้ำอีกด้วย ในส่วนของภาคเกษตรกรรมส่วนใหญ่แล้วประชากร

ในจังหวัดจันทบุรีเน้นด้านการเพาะปลูก โดยพืชที่นิยมปลูกกันมากที่สุด คือ มังคุด ทุเรียน สละ เงาะ แก้วมังกร พริกไทย และยางพารา เป็นต้น อีกทั้งยังมีแหล่งท่องเที่ยวทางธรรมชาติและวัฒนธรรมมากมาย ส่งผลให้การท่องเที่ยวของจังหวัดสามารถสร้างรายได้ให้กับประเทศเป็นจำนวนมาก อันเนื่องมาจาก ปัจจัยพื้นฐานที่เอื้ออำนวยต่อการขับเคลื่อนเศรษฐกิจ และยังมีแหล่งท่องเที่ยวชายทะเลที่สำคัญ ได้แก่ ชายหาดเจ้าหลาว ทะเลแหลมสิงห์ ทะเลแหลมเสด็จ และคู้งวิมาน เป็นต้น ซึ่งเป็นแหล่งท่องเที่ยวที่ได้รับความนิยม เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง ยิ่งไปกว่านั้น ยังมีแหล่งท่องเที่ยวเชิงเกษตรกรรม แหล่งท่องเที่ยวเชิงนิเวศป่าชายเลน และด้านการประมงของศูนย์ศึกษาการพัฒนาอ่าวคุ้งกระเบน อันเนื่องมาจากพระราชดำริ ซึ่งเป็นแหล่งท่องเที่ยวที่สำคัญของจังหวัดจันทบุรี จะสังเกตเห็นว่า ไม่ว่าจะเป็นระบบภาคเกษตรกรรม ภาคอุตสาหกรรม หรือภาคการท่องเที่ยว ล้วนแล้วแต่ต้องใช้ทรัพยากรด้านเชื้อเพลิงแทบทั้งสิ้น ดังนั้น การศึกษาเกี่ยวกับพลังงานทางเลือกหรือพลังงานทดแทนนับว่าเป็นเรื่องที่สำคัญอย่างยิ่งที่ทั่วโลกให้ความสนใจ และไม่ควรมองข้ามไป

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) เป็นองค์ความรู้ด้านคณิตศาสตร์จะช่วยในการอธิบายพฤติกรรมและปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นบนโลกความเป็นจริง แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับศาสตร์สาขาต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นด้านวิทยาศาสตร์หรือวิศวกรรมศาสตร์ โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation) คือ อันดับของอนุพันธ์เป็นจำนวนเต็ม (Integer order) แต่เมื่อไม่นานมานี้สมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน (Fractional Differential Equation) หรือสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับไม่ใช่จำนวนเต็ม เข้ามามีส่วนสำคัญในการประยุกต์กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายพฤติกรรมและปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนต่าง ๆ ที่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่สามารถอธิบายได้ หรือยุ่งยากต่อการแก้ปัญหา ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าอย่างเห็นได้ชัด และสามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนบางประเภทที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อันดับจำนวนเต็มไม่สามารถอธิบายได้

แคลคูลัสเศษส่วน (Fractional Calculus) เกิดขึ้นมามากกว่า 3 ศตวรรษ เป็นแคลคูลัสที่มีประวัติอันยาวนาน โดยเกิดขึ้นมาในช่วงเวลาใกล้เคียงกับแคลคูลัสดั้งเดิม (Classical Calculus) นั่นคือเมื่อ โคนิซัส ได้กำหนดนิยามของอนุพันธ์อันดับที่ n โดยที่ n เป็นสมาชิกของเซตของจำนวนเต็มบวก เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $d^n y/dx^n = D^n y$ ต่อมาในปี ค.ศ. 1695 กุยลอมเมอ เดอ โลปีตาล (นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมนี) ได้เกิดข้อสงสัยเกี่ยวกับความหมายของสัญลักษณ์ดังกล่าวขึ้น จึงทำให้เขาได้ตัดสินใจเขียนจดหมายถึง โคนิซัส โดยมีใจความสำคัญของจดหมายฉบับนี้เป็นเพียงคำถามสั้น ๆ ว่า “ถ้า $n = 0.5$ แล้วจะเกิดอะไรขึ้น?” จากคำถามเพียงสั้น ๆ คำถามเดียวที่เรียบง่าย แม้ว่าจะไม่ได้มีความลึกซึ้งแต่อย่างใด แต่คำถามนี้ก็จุดเริ่มต้นของการเดินทางที่ยาวนานของแคลคูลัสเศษส่วน และได้เปลี่ยนแปลงประวัติศาสตร์ครั้งยิ่งใหญ่ ต่อการศึกษาแคลคูลัสดั้งเดิมในแนวคิดที่ว่า “อันดับของอนุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มเสมอไป” ในปีเดียวกันโคนิซัสได้เขียนจดหมายตอบกลับไปว่า “ปรากฏการณ์เช่นนี้ สักวันหนึ่งคงมีความกระจ่างชัดมากขึ้นแน่นอน” จึงเป็นจุดเริ่มต้นของการนำไปสู่การศึกษาศาสตร์ทางด้านแคลคูลัสเศษส่วนทั้งด้านทฤษฎีและการประยุกต์ใช้ของนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์ตลอดระยะเวลาหลายร้อยปีที่ผ่านมา (Comelli R.N., et al. (2016))

สำหรับโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยมุ่งเน้นการศึกษาการมีอยู่จริงของคำตอบและการวิเคราะห์เสถียรภาพของคำตอบระบบสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนสำหรับแบบจำลองการผลิตไบโอเอทานอลภายใต้ตัวดำเนินการแฟร็กทัล-เศษส่วน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนไม่เชิงเส้น 3 สมการ ดังนี้

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\xi}^{\text{FF}} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} S = F(S_0 - S) - \frac{\mu_{\max}}{Y_{\frac{B}{S}}} M_2(S, E) X V, \\ \mathcal{V}_{\xi}^{\text{FF}} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} B = -FB + \mu_{\max} M_2(S, E) B V + R F (C-1) B - b_H B V, \\ \mathcal{V}_{\xi}^{\text{FF}} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} E = -FE + Y_{\frac{E}{B}} \mu_{\max} M_2(S, E) B V + R V (C-1) E + F \gamma B, \end{cases} \quad (1.1)$$

โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $S(0) = S_0 > 0$, $B(0) = B_0 > 0$, $E(0) = E_0 > 0$ ระบบสมการ (1.1) สามารถหาค่าได้โดยกำหนดค่า

$$S^* = \frac{S}{K_S}, \quad X^* = \frac{X}{Y_E K_S}, \quad E^* = \frac{E}{K_S}, \quad t^* = \mu_{\max} t$$

ฉะนั้นสมการ (1.1) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\xi}^{\text{FF}} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} S = \frac{S_0^* - S^*}{\tau^*} - \frac{S^* B^*}{1 + S^* + \gamma_1 (E^*)^2}, \\ \mathcal{V}_{\xi}^{\text{FF}} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} B = -\frac{B^*}{\tau^*} + \frac{S^* B^*}{1 + S^* + \gamma_1 (E^*)^2} - b_H^* B^* + \frac{R^* B^*}{\tau^*}, \\ \mathcal{V}_{\xi}^{\text{FF}} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} E = -\frac{E^*}{\tau^*} + \frac{\gamma_2 B^*}{\tau^*} + \frac{\gamma_3 S^* B^*}{1 + S^* + \gamma_1 (E^*)^2} + \frac{R^* E^*}{\tau^*}, \end{cases} \quad (1.2)$$

โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $S^*(0) = S_0^* > 0$, $B_0(0) = B_0^* > 0$, $E_0(0) = E_0^* > 0$ และคำอธิบายของพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลอง (1.2) แสดงไว้ด้านล่างดังนี้:

F	หมายถึง	อัตราการไหลผ่านเครื่องปฏิกรณ์
b_H	หมายถึง	ค่าสัมประสิทธิ์การเสียชีวิต
b_H^*	หมายถึง	อัตราการเสียชีวิตที่ไร้มิติ
K_S	หมายถึง	ค่าคงที่ความอิ่มตัวของเอทานอล
K_E	หมายถึง	ค่าคงที่การยับยั้งของเอทานอล
B, S, E	หมายถึง	ชีวมวล ชับสเตอร์ต และเอทานอล
B^*, S^*, E^*	หมายถึง	ชีวมวล ชับสเตอร์ต และเอทานอลที่ไร้มิติ
V	หมายถึง	ปริมาตรของเครื่องปฏิกรณ์
t, t^*	หมายถึง	เวลาและเวลาไร้มิติ
$Y_{\frac{B}{S}}$	หมายถึง	ค่าสัมประสิทธิ์ผลผลิตต่อชีวมวล

$\frac{Y_E}{S}$	หมายถึง	ค่าสัมประสิทธิ์เอทานอลต่อชีวมวล
γ	หมายถึง	ค่าคงที่จลนศาสตร์ของการผลิตเอทานอล
$M_2(S, E)$	หมายถึง	อัตราการเติบโตจำเพาะ
μ_{\max}	หมายถึง	อัตราสูงสุดของการเติบโตจำเพาะ
τ, τ^*	หมายถึง	เวลาพำนักและเวลาพำนักแบบไม่มีมิติ
R	หมายถึง	อัตราส่วนการรีไซเคิลขึ้นอยู่กับอัตราการไหลของปริมาตร
R^*	หมายถึง	พารามิเตอร์ที่แสดงถึงการรีไซเคิลที่มีประสิทธิภาพ

โดยการวิเคราะห์การมีอยู่จริงของคำตอบของระบบสมการ (1.2) จะประยุกต์ใช้เทคนิคทางทฤษฎีบทจุดตรึงบานาค (Banach's fixed point theorem) และการวิเคราะห์ความเสถียรของคำตอบของระบบสมการ (1.2) จะวิเคราะห์โดยใช้เครื่องมือการวิเคราะห์ความเสถียรภาพที่ได้รับคความนิยมของอูลัม-ไฮเออร์ (Ulam-Hyers Stability) ยิ่งไปกว่านั้น ยังแสดงรูปแบบคำตอบเชิงตัวเลขเพื่อแสดงให้เห็นถึงพฤติกรรมของคำตอบและความแม่นยำที่เกิดขึ้นของระบบสมการ (1.2)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาองค์ความรู้ที่เกี่ยวกับแคลคูลัสเศษส่วน ทฤษฎีบทจุดตรึงประเภทต่าง ๆ ทฤษฎีบทการวิเคราะห์ความเสถียรภาพประเภทอูลัมของคำตอบที่เกี่ยวข้อง
2. เพื่อปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และสร้างรูปแบบคำตอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (1.2)
3. เพื่อสร้างเงื่อนไขเพียงพอของการมีคำตอบอยู่จริงของระบบสมการ (1.2) โดยใช้ทฤษฎีบทจุดตรึงบานาค
4. เพื่อสร้างคุณสมบัติ และพิสูจน์ทฤษฎีบทความเสถียรภาพอูลัมประเภทต่าง ๆ ของคำตอบของระบบสมการ (1.2)
5. เพื่อหาคำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการ (1.2) เพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีบทที่สร้างขึ้น โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์สำหรับคำนวณค่าเชิงตัวเลขที่มีความซับซ้อน

ประโยชน์ของการวิจัย

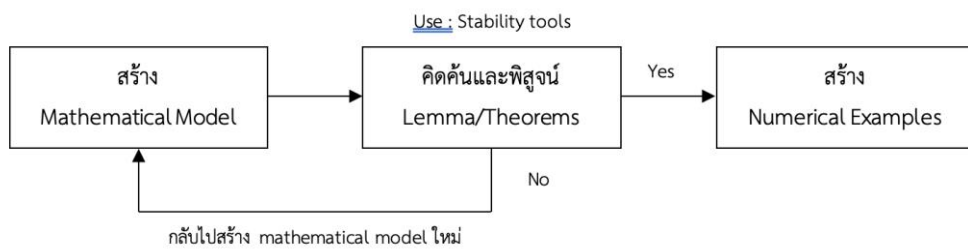
1. ได้องค์ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับแคลคูลัสเศษส่วน ทฤษฎีบทจุดตรึงประเภทต่าง ๆ ทฤษฎีบทการวิเคราะห์ความเสถียรภาพประเภทอูลัมของคำตอบที่เกี่ยวข้อง
2. ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และรูปแบบคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนร่วมกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้นหรือเงื่อนไขค่าขอบที่เหมาะสม (1.2)
3. ได้เงื่อนไขเพียงพอของการมีคำตอบอยู่จริงของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน (1.2)
4. ได้คุณสมบัติ และทฤษฎีบทความเสถียรภาพของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน (1.2)
5. ได้คำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน (1.2)

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้จะทำการศึกษาระบบการผลิตไบโอเอทานอลร่วมกับตัวดำเนินการแฟร็กทัล-เศษส่วน โดยขั้นแรกจะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนร่วมกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้นหรือเงื่อนไขค่าขอบที่เหมาะสม (1.2) พร้อมทั้งหารูปแบบคำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้นหรือเงื่อนไขค่าขอบที่เหมาะสมกับสมการเชิงอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนดังกล่าว หลังจากนั้นทำการสร้างเงื่อนไขเพียงพอเพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทการมีคำตอบอยู่จริงของคำตอบของแบบจำลองที่สร้างขึ้น ขั้นที่สองทำการสร้างทฤษฎีบทการมีคำตอบอยู่จริงและมีเพียงคำตอบเดียว โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจุดตรึงบานาค ลำดับถัดไปจะสร้างคุณสมบัติที่เหมาะสมต่อการพิสูจน์ทฤษฎีบทความมีเสถียรภาพของคำตอบประเภทอูแลม-ไฮเออร์ท่ายที่สุดแล้วงานวิจัยนี้ จะแสดงคำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนเพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎีบทของการมีคำตอบอยู่จริงที่สร้างขึ้น พร้อมทั้งวิเคราะห์ความมีเสถียรภาพของคำตอบโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ช่วยในการคำนวณค่าเชิงตัวเลข

กรอบแนวความคิดในการวิจัย

สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของไบโอเอทานอลร่วมกับตัวดำเนินการแฟร็กทัล-เศษส่วน (1.2) พร้อมทั้งหารูปแบบคำตอบของแบบจำลอง (1.2) หลังจากนั้นใช้เครื่องมือวิเคราะห์ทางทฤษฎีบทจุดตรึง (Fixed point theory) และการวิเคราะห์ความเสถียรภาพของอูแลม-ไฮเออร์ท่ายประเภทต่าง ๆ ในการสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการมีคำตอบอยู่จริงและความมีเสถียรภาพของคำตอบของแบบจำลอง (1.2) ในงานวิจัยนี้ พร้อมทั้งยกตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อยืนยันความถูกต้องของเงื่อนไขเพียงพอสำหรับทฤษฎีบทที่สร้างขึ้นอีกด้วย กรอบแนวความคิดแสดงดังแผนภาพ ดังนี้



ภาพที่ 1.1 กรอบแนวความคิดของการวิจัย