บทที่ 2
แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับแคลคูลัสเศษส่วนที่เกี่ยวข้อง

สมมุติให้ $\alpha(t)$ และ $\beta(t)$ เป็นอันดับตัวแปรเศษส่วน (fractional variable-order) และมิติตัวแปรเศษส่วน (fractional variable dimension) ตามลำดับ

ให้ $\mathrm{G}(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ได้ในช่วง (a,b) ที่มีอันดับ $\beta(t)$ จะได้นิยามเบื้องต้นของแคลคูลัสแฟร็กทัล-เศษส่วนที่มีอันดับเป็นตัวแปร ดังนี้

บทนิยาม 2.1.1

อนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน สำหรับฟังก์ชัน $\mathrm{G}(t)$ ที่มีอันดับตัวแปร $(\alpha(t),\beta(t))$ ในรูปแบบของรีมันน์-ลียูวิลล์ที่มีเคอร์เนลเป็นกฎยกกำลัง ถูกนิยามโดย

$$ {}^{\mathrm{FFP}}_{\quad t}\mathcal{D}_0^{(\alpha(t),\beta(t))}\mathrm{G}(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha(t))}\cdot\frac{d}{dt^{\beta(t)}}\int_0^t (t-s)^{m-\alpha(t)-1}\mathrm{G}(s)ds \qquad (2.1)$$

เมื่อ $m-1<\alpha(t),\beta(t)\le m,\ m\in\mathbb{N}$ โดยที่ $\Gamma(z)$ คือ ฟังก์ชันแกมมาที่ถูกนิยามโดย

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds \qquad (2.2)$$

และ ฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์ (Mittag-Leffler function) E_ϕ ถูกนิยามโดย

$$\frac{d\mathrm{G}(s)}{ds^{\beta(t)}}=\lim_{t\to s}\left\{\frac{\mathrm{G}(t)-\mathrm{G}(s)}{t^{\beta(t)}-s^{\beta(t)}}\right\} \qquad (2.3)$$

บทนิยาม 2.1.2

อนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน สำหรับฟังก์ชัน $\mathrm{G}(t)$ ที่มีอันดับตัวแปร $(\alpha(t),\beta(t))$ ในรูปแบบของคาพูโต-ฟาบริซิโอที่มีเคอร์เนลเป็นเลขชี้กำลังแบบถดถอย ถูกนิยามโดย

$$ {}^{\mathrm{FFE}}_{\quad t}\mathcal{D}_0^{(\alpha(t),\beta(t))}\mathrm{G}(t)=\frac{\mathrm{M}(\alpha(t))}{1-\alpha(t)}\cdot\frac{d}{dt^{\beta(t)}}\int_0^t \exp\left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}(t-s)\right)\mathrm{G}(s)ds \qquad (2.4)$$

เมื่อ $\alpha(t)>0,\ \beta(t)\le m,\ m\in\mathbb{N}$ และ $\mathrm{M}(\alpha(t))=2/(2-\alpha(t)), 0<\alpha(t)\le 1$

โดยที่ $\mathrm{M}(0)=\mathrm{M}(1)=1$

บทนิยาม 2.1.3

อนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน สำหรับฟังก์ชัน $\mathrm{G}(t)$ ที่มีอันดับตัวแปร $(\alpha(t),\beta(t))$ ในรูปแบบอาตานกานา-แบลีนูที่มีเคอร์เนลเป็นฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์ ถูกนิยามโดย

$$ {}^{\mathrm{FFM}}_{\quad t}\mathcal{D}_0^{(\alpha(t),\beta(t))}\mathrm{G}(t)=\frac{\mathrm{AB}(\alpha(t))}{1-\alpha(t)}\cdot\frac{d}{dt^{\beta(t)}}\int_0^t \mathrm{E}_{\alpha(t)}\left[-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}(t-s)^{\alpha(t)}\right]\mathrm{G}(s)ds \qquad (2.5)$$

เมื่อ $0<\alpha(t),\beta(t)\le 1,\ \mathrm{AB}(\alpha(t))=1-\alpha(t)+\alpha(t)/\Gamma(\alpha(t))$ ที่มี $\mathrm{AB}(0)=\mathrm{AB}(1)=1$

และฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์ คือ

$$E_{\alpha(t)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha(t)k+1)},\quad z,\alpha\in\mathbb{C},\quad Re(\alpha(t))>0 \tag{2.6}$$

โดยที่ $\mathbb{C}$ คือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 2.1.4

ปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนของฟังก์ชัน $G(t)$ ที่มีอันดับตัวแปร $(\alpha(t),\beta(t))$ ในรูปแบบของรีมันน์-ลียูวิลล์ที่มีเคอร์เนลเป็นกฎยกกำลัง ถูกนิยามโดย

$${}^{FFP}_{\ \ t}I_0^{\alpha(t),\beta(t)}G(t)=\frac{\beta(t)}{\Gamma(\alpha(t))}\int_0^t s^{\alpha(t)-1}(t-s)^{\alpha(t)-1}G(s)ds \tag{2.7}$$

บทนิยาม 2.1.5

ปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนของฟังก์ชัน $G(t)$ ที่มีอันดับตัวแปร $(\alpha(t),\beta(t))$ ในรูปแบบของคาพูโต-ฟาบริซิโอที่มีเคอร์เนลเป็นเลขชี้กำลังแบบถดถอย ถูกนิยามโดย

$${}^{FFE}_{\ \ t}I_0^{\alpha(t),\beta(t)}G(t)=\frac{(1-\alpha(t))\beta(t)t^{\beta(t)-1}G(t)}{M(\alpha(t))}+\frac{\alpha(t)\beta(t)}{M(\alpha(t))}\int_0^t s^{\alpha(t)-1}G(s)ds \tag{2.8}$$

บทนิยาม 2.1.6

ปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนของฟังก์ชัน $G(t)$ ที่มีอันดับตัวแปร $(\alpha(t),\beta(t))$ ในรูปแบบอาตานกานา-แบลีนูที่มีเคอร์เนลเป็นฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์ ถูกนิยามโดย

$${}^{FFM}_{\ \ t}I_0^{\alpha(t),\beta(t)}G(t)=\frac{(1-\alpha(t))\beta(t)t^{\beta(t)-1}G(t)}{AB(\alpha(t))}+\frac{\alpha(t)\beta(t)}{AB(\alpha(t))}\int_0^t s^{\alpha(t)-1}G(s)ds \tag{2.9}$$

ทฤษฎีบทจุดตรึงที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.2.1 จุดตรึง (Fixed point)

กำหนดให้ Q เป็นการส่งบนปริภูมิเวกเตอร์ X กล่าวคือ $Q:X\to X$ จะนิยาม $x^*\subset X$ ว่า เป็น จุดตรึง (fixed point) ถ้า $Q(x^*)=x^*$ และนิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Tx^*=x^*$

บทนิยาม 2.2.2 การส่งแบบหดตัว (Contraction mapping)

กำหนดให้ X เป็น ปริภูมิบานาค (Banach space) ดังนั้น การส่ง $Q:X\to X$ เป็น การส่งแบบหดตัว บนเซต X ถ้า มีจำนวนจริง $0<L<1$ ที่ทำให้

$$\|Qx-Qy\|\le L\|x-y\|,\quad \forall x,y,\in X$$

โดยที่ จำนวนจริงบวก L เรียกว่า ค่าคงตัวการหดตัว (contraction constant) ของการส่ง Q

ทฤษฎีบท 2.2.1 ทฤษฎีบทจุดตรึงบานาค (Banach fixed point theorem)

กำหนดให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ $\mathrm{W} \subset \mathrm{X}$, $\mathrm{W} \neq \varnothing$ เป็นสับเซตที่เป็นเซตปิด ถ้าตัวดำเนินการ $\mathrm{Q}:\mathrm{W} \to \mathrm{W}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขการส่งแบบหดตัว แล้ว การส่ง Q มีจุดตรึงเพียงค่าเดียวเท่านั้นใน W

ทฤษฎีบท 2.2.2 ทฤษฎีบทจุดตรึงลีเรย์-เชาเดอร์ (Leray-Schauder fixed point theorem)

กำหนดให้ W เป็นเซตนูนปิดที่ซึ่งเป็นสับเซตของ X และกำหนดให้ $0 \in \mathrm{P}$ โดยที่ P เป็นสับเซตเปิดของ X ถ้า $\mathrm{Q}:\overline{\mathrm{P}} \to \mathrm{W}$ เป็นตัวดำเนินการที่ต่อเนื่องและกระชับ แล้ว Q จะมีจุดตรึงใน $\overline{\mathrm{P}}$ หรือจะมี $\exists z \in \partial\overline{\mathrm{P}}$ และ $\sigma \in (0,1)$ ที่ทำให้ $z = \sigma \mathrm{Q}(z)$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

องค์ความรู้ทางด้าน แคลคูลัสเศษส่วนและสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนได้มีการ ศึกษาและพัฒนาไปอย่างมาก ทั้งด้านทฤษฎีและการประยุกต์ใช้งาน เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนนั้นสามารถอธิบายคุณสมบัติการจดจำลักษณะพิเศษของวัสดุและกระบวนการต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพและมีประสิทธิผล มากกว่าแคลคูลัสดั้งเดิม อีกทั้งยังมีการนำไปประยุกต์ใช้งานอย่างแพร่หลายทั้ง ทาง ด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ อาทิเช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา ชีวเคมี เศรษฐศาสตร์ พลศาสตร์ จุลศาสตร์ อิเล็กโตรไดนามิกส์ของตัวกลางเชิงซ้อน ตาข่ายแสง ความปั่นป่วนในพลาสม่า โพลิเมอร์ วงจรไฟฟ้า การควบคุมเชิงพลวัตร และ วงการแพทย์ เป็นต้น (Bhowmik S.M., et al. (2018)) ปัจจุบันมีนักวิจัยได้สร้างบทนิยามของตัวดำเนินการสำหรับแคลคูลัสเศษส่วนที่ได้รับความนิยมไว้หลายประเภท เช่น รีมันน์ -ลียูวิลล์ (Riemann-Liouville) (Ciesielski A., et al. (2020), Alqahtani R.T., et al. (2021)) คาร์พูโต (Caputo) (Riemann-Liouville) (Ciesielski A. & Grzywacz R.. (2020), Alqahtani R.T., et al. (2021)) ฮาดามาร์ด (Hadamard) (Riemann-Liouville) (Ciesielski A. & Grzywacz R.. (2020), Alqahtani R.T., et al. (2021)) ฮิลเฟอร์ (Hilfer) (Riemann-Liouville) (Ciesielski A. & Grzywacz R.. (2020), Alqahtani R.T., et al. (2021)) และ คาตูกามโพลา (Katugampola) (Arshad S., Defterli O. & Baleanu D.. (2020), Jan A., et al. (2020)) ลียูวิลล์-คาร์พูโต (Liouville- Caputo) (Baleanu D., et al. (2020)) คาร์พูโต-ฟาบริซิโอ (Caputo-Fabrizio) (Kilbas A.A., et al. (2006)) อาตานกานา-บาเลนู-คาร์พูโต (Atangana-Baleanu-Caputo) (Caputo M. & Fabrizio M.. (2015)) และแฟร็กทัล-เศษส่วน (Fractal-Fractional) (Atangana A. & Baleanu D.. (2016)) เป็นต้น

จากประวัติศาสตร์ที่ผ่านมา มีงานวิจัยมากมายที่ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างซับสเตรต (S) ชีวมวล (B) และเอทานอล (E) ในแบบจำลองการผลิตเอทานอล รวมไปถึงการพิจารณาอัตราส่วน ของการรีไซเคิลและอัตราการย่อยสลาย ของเอทานอลอีกด้วย ซึ่งมีนักวิจัยในสาขาต่าง ๆ พยายามสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ หรือสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนขึ้น เพื่อศึกษาทฤษฎีบทการมีอยู่จริงของคำตอบ ความมีเสถียรภาพของคำตอบ การมีเสถียรภาพของจุดสมดุล การหาเงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเสถียรภาพของจุด

สมดุล ผลลัพธ์ที่ได้ทำให้เกิดเป็นทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่สามารถนำไปสู่การวิเคราะห์คาดการณ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้นก่อให้เกิดองค์ความรู้ที่เป็นประโยชน์ต่อวงการวิชาการทั้งด้านคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ หรือแม้กระทั่งศาสตร์ด้านวิศวกรรมศาสตร์ที่เกี่ยวข้องเป็นอย่างมาก (Atangana A.. (2017), Qureshi S. et al. (2019), Panjwani S. et al. (2020), El-Seddik M.M.. (2017)) ในปี ค.ศ. 2012 (Alqahtani R.T. (2021)) ได้ตรวจสอบเงื่อนไขสำหรับการก่อตัวของพฤติกรรม เชิงพลวัตที่ซับซ้อนในระบบที่มีการแข่งขันของจุลินทรีย์ที่บริสุทธิ์ อย่างง่าย ต่อมา ในปี ค.ศ. 2013 (Alqahtani R.T. et al. (2021)) ได้ตรวจสอบความสามารถของยีสต์ในการหมักน้ำตาลที่พบในรายการต่าง ๆ ที่ผลิตโดยบริษัทที่มีชื่อเสียง หลังจากนั้นในปี 2016 (Alqahtani R.T. et al. (2022)) ได้เผยแพร่แบบจำลองการผลิตเอทานอลตามประสิทธิภาพของยีสต์ Saccharomyces เชิงพาณิชย์ 10 สายพันธุ์ในการหมักน้ำตาลจากอุตสาหกรรมเครื่องดื่มที่มีแอลกอฮอล์เป็นชุด ในปี ค.ศ. 2018 (El-Seddik M.M.. (2017)) ขยายรูปแบบกระบวนการของ การวิเคราะห์ในงานวิจัย (Alqahtani R.T. et al. (2022)) โดยพิจารณาร่วมกับอัตราส่วนการรีไซเคิลและอัตราการย่อยสลาย เข้าไป ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยส่วนประกอบที่สำคัญ 3 องค์ประกอบเพื่อ อธิบายวิวัฒนาการของซับสเตรต (S) ชีวมวล (B) และเอทานอล (E) โดยกำหนดแบบจำลองสำหรับการผลิตเอทานอลดังนี้:

$$
\begin{cases}
\mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{S}}{dt} = \mathrm{F}\,(\mathrm{S}_0 - \mathrm{S}) - \dfrac{\mu_{\max}}{\mathrm{Y}_{\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{S}}}}\mathrm{M}_2(\mathrm{S},\mathrm{E})\mathrm{XV}, \\
\mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{B}}{dt} = -\mathrm{F}\,\mathrm{B} + \mu_{\max}\mathrm{M}_2(\mathrm{S},\mathrm{E})\mathrm{BV} + \mathrm{R}\,\mathrm{F}\,(\mathrm{C}-1)\mathrm{B} - b_{\mathrm{H}}\mathrm{BV}, \\
\mathrm{V}\dfrac{d\mathrm{E}}{dt} = -\mathrm{F}\,\mathrm{E} + \mathrm{Y}_{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{B}}}\mu_{\max}\mathrm{M}_2(\mathrm{S},\mathrm{E})\mathrm{BV} + \mathrm{R}\,\mathrm{V}(\mathrm{C}-1)\mathrm{E} + \mathrm{F}\,\gamma\mathrm{B},
\end{cases}
$$

โดยที่ M_2 แทน การแสดงออกของแอนดรูว์ที่ถูกดัดแปลงด้วยการยับยั้งโดยเอทานอล

$$
\mathrm{M}_2(\mathrm{S},\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{K}_{\mathrm{S}} + \mathrm{S} + \mathrm{K}_{\mathrm{E}}\mathrm{E}^2}, \qquad \tau = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{F}}
$$

สมการแรกของแบบจำลองข้างต้นแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของสารตั้งต้น อัตราการไหลผ่านเครื่องปฏิกรณ์และการใช้สารตั้งต้นของสารชีวมวลเป็นตัวกำหนดอัตรานี้ เทอมแรกของสมการระบุการเปลี่ยนแปลงใน S เนื่องจากการไหลผ่านเครื่องปฏิกรณ์ ในขณะที่เทอมสุดท้ายแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงเชิงลบของความเข้มข้นของ S อันเนื่องมาจากการบริโภคสารชีวมวลของสารตั้งต้น

อัตราการเปลี่ยนแปลงของสารชีวมวลแสดงโดยสมการที่สองของแบบจำลอง อัตรานี้กำหนดโดยการไหลของเครื่องปฏิกรณ์ ปริมาณการใช้ S และการมีอยู่ของหน่วยตกตะกอน การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้น B ที่เกิดจากเครื่องปฏิกรณ์แบบไหลผ่านถูกกำหนดโดยเทอมแรกทางด้านขวามือของสมการที่สอง การเปลี่ยนแปลงเชิงบวกในความเข้มข้นของ B เนื่องจากการบริโภค S จะแสดงด้วยระยะ ที่สอง ระยะที่สามระบุการใช้หน่วยการชำระ ในขณะที่ระยะที่สี่แสดงการกำจัด B อันเนื่องมาจากการรวมกันของกระบวนการลำดับแรกซึ่งรวมถึงการสูญเสียเซลล์และการสลายตัวของเซลล์

สมการที่สามของแบบจำลองแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของเอทานอล ขึ้นอยู่กับการใช้หน่วยตกตะกอนและเครื่องปฏิกรณ์แบบไหลผ่าน เทอมแรกของสมการที่สามให้การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของเอทานอลเนื่องจากการไหลผ่านเครื่องปฏิกรณ์ ระยะที่สองหมายถึงการเพิ่มขึ้นของความเข้มข้นของเอทานอลอันเนื่องมาจากการใช้ S ระยะที่สามให้การใช้หน่วยการตกตะกอน ระยะที่สี่จำลองการผลิตเอทานอลโดยการบำรุงรักษา

เมื่อไม่นานมานี้ มีนักวิจัยได้ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบการผลิตไบโอเอทาโดยใช้แคลคูลัสเศษส่วนคาร์พูโต (Caputo) (Atangana A.. (2017), Panjwani S., et al. (2020))โดยพิจารณาเงื่อนไขเพียงต่อการมีอยู่จริงและความมีเสถียรภาพของคำตอบของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน อีกทั้งยังนำเสนอคำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการอีกด้วย ในไม่กี่ปีมานี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ร่วมกับแคลคูลัสเศษส่วน เพื่ออธิบายปรากฎการณ์ที่ซับซ้อนของปัญหาด้านวิทยาศาสตร์ประยุกต์ (Atangana A. & Qureshi S.. (2019), Gom\'{e}z-Aguilar J.F.. (2019)) นักวิจัยได้สร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เพื่อจำลองความซับซ้อนของธรรมชาติโดยใช้ แคลคูลัสเศษส่วน เพื่อศึกษาความจำ เพาะ และลักษณะการถ่ายทอดทางพันธุกรรมของกระบวนการทางกายภาพ ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง ซึ่งอาจพบได้ในหลายสาขาวิชา (Etemad S. et al. (2022), Rashid S., Jarad F. & Ahmad A. G.. (2022), Rezapour S., et al. (2022)) นอกจากนี้ แคลคูลัสเศษส่วน ยังมีการประยุกต์ใช้ในแบบจำลองทางชีวเคมีอีกด้วย เมื่อไม่นานมานี้ งานวิจัย (Al-Qurashi M. et al. (2023)) ใช้ตัวดำเนินการเศษส่วนเพื่อศึกษาแบบจำลองเอทานอลในเลือด การประยุกต์ใช้งานของตัวดำเนินการเศษส่วนบางส่วนในแบบจำลองทางชีวเคมีรวมอยู่ใน (Sol\'{\i}s-P\'{e}rez1 J.E. et al. (2022), Li D. (2022), Basim M. et al. (2022)) จากการทบทวนวรรณกรรมที่ผ่านมาข้างต้น จะสังเกตเห็นว่ามีนักวิจัยได้ให้ความสนใจศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับจำนวนเต็มไม่เชิงเส้นของระบบการผลิตไบโอเอทานอลร่วมกับเงื่อนไขต่าง ๆ แต่ยังมีงานวิจัยไม่มากนักให้ความสนใจระบบสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วนไม่เชิงเส้นของระบบการผลิตไบโอเอทานอลในแคลคูลัสเศษส่วนประเภทต่าง ๆ ร่วมกับการวิเคราะห์ประเภทอูแลม-ไฮเออร์