บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ เราจะศึกษาผลลัพธ์เชิงคุณภาพสำหรับแบบจำลอง BEP (1.2) ซึ่งมีอนุพันธ์เชิงเศษส่วนในรูปแบบของรีมันน์-ลียูวิลล์ที่มีเคอร์เนลเป็นกฎยกกำลัง (บทนิยาม 2.1.1), รูปแบบของคาพูโต-ฟาบริซิโอที่มีเคอร์เนลเป็นเลขชี้กำลังแบบถดถอย (บทนิยาม 2.1.2), และรูปแบบอาตานกานา-แบลีนูที่มีเคอร์เนลเป็น ฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์ (บทนิยาม 2.1.3) นั่นคือ ทฤษฎีบทการมีอยู่จริง และทฤษฎีบทความมีเสถียรภาพอูแลมประเภทต่าง ๆ กำหนดให้

$$G_1(\xi,S^*,B^*,E^*)=\frac{S_0^*-S^*}{\tau^*}-\frac{S^*B^*}{1+S^*+\gamma_1(E^*)^2} \tag{3.1}$$

$$G_2(\xi,S^*,B^*,E^*)=-\frac{B^*}{\tau^*}+\frac{S^*B^*}{1+S^*+\gamma_1(E^*)^2}-b_H^*B^*+\frac{R^*B^*}{\tau^*} \tag{3.2}$$

$$G_3(\xi,S^*,B^*,E^*)=-\frac{E^*}{\tau^*}+\frac{\gamma_2B^*}{\tau^*}+\frac{\gamma_3S^*B^*}{1+S^*+\gamma_1(E^*)^2}+\frac{R^*E^*}{\tau^*} \tag{3.3}$$

แบบจำลอง VOFF-BEP ภายใต้เคอร์เนลเป็นกฎยกกำลัง

พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นร่วมกับอนุพันธ์ แฟร็กทัล-เศษส่วน ภายใต้เคอร์เนลเป็นกฎยกกำลัง ${}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}S^*(\xi)&=G_1(\xi,S^*,B^*,E^*)\\
{}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}B^*(\xi)&=G_2(\xi,S^*,B^*,E^*)\\
{}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}E^*(\xi)&=G_3(\xi,S^*,B^*,E^*)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

เมื่อ $G_i(\xi,S^*,B^*,E^*)$ ถูกกำหนดโดย (3.1)-(3.3) และ (3.4) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{cases}{}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}U(\xi)=G(\xi,U(\xi))\\ U(0)=U_0\geq 0\end{cases} \tag{3.5}$$

เมื่อ

$$U=\begin{pmatrix}S^*(\xi)\\B^*(\xi)\\E^*(\xi)\end{pmatrix},\quad U(0)=\begin{pmatrix}S^*(0)\\B^*(0)\\E^*(0)\end{pmatrix},\quad G(\xi,U^*(\xi))=\begin{pmatrix}G_1(\xi)\\G_2(\xi)\\G_3(\xi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_1(\xi,S^*,B^*,E^*)\\G_2(\xi,S^*,B^*,E^*)\\G_3(\xi,S^*,B^*,E^*)\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

แบบจำลอง (3.4) สามารถเขียนใหม่ในรูปแบบโวล์เทอร์รา (Volterra) ได้เนื่องจากปริพันธ์เศษส่วนสามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน ในรูปแบบของ รีมันน์ -ลียูวิลล์ของแบบจำลอง (3.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFP}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{S}^*(\xi) = \beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFP}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{B}^*(\xi) = \beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFP}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{E}^*(\xi) = \beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \end{cases} \tag{3.7}$$

เพื่อความสะดวก จะเขียนสมการ (3.5) ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFP}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{U}(\xi) = \beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{U}(\xi)) \\ \mathrm{U}(0) = \mathrm{U}_0 \geq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

ในการใช้เงื่อนไขเริ่มต้น จะต้องทำการแทนที่ตัวดำเนินการ ${}^{\mathrm{FFP}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ ด้วย ${}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ และใช้ปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน (2.7) กับสมการ (3.8) ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\mathrm{U}(\xi) = \mathrm{U}_0 + \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{U}(s))ds \tag{3.9}$$

ในการวิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงคุณภาพของแบบจำลอง จะกำหนดให้ $\mathrm{X}_1 = \mathrm{C}([0,\mathrm{T}^*]\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ เป็นปริภูมิบานาคร่วมกับนอร์ม $\|\mathrm{X}\| = \sup_{t\in\mathrm{J}}\{|\,\mathrm{X}(t)\,|\}$ โดยที่

$$\|\mathrm{U}\| = \|(\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\| = \sup_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]}\left|\mathrm{S}^*(\xi)+\mathrm{B}^*(\xi)+\mathrm{E}^*(\xi)\right|, \quad \mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^* \in \mathrm{X}_1$$

กำหนดให้ตัวดำเนินการ (การส่ง) $\mathrm{Q}_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_1$ ดังนี้

$$(\mathrm{Q}_1\mathrm{U})(\xi) = \mathrm{U}_0 + \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{U}(s))ds \tag{3.10}$$

ดังนั้นจะได้ว่า สมการ (3.9) สามารถเขียนได้ในรูปปัญหาจุดตรึง $\mathrm{U}(\xi) = (\mathrm{Q}_1\mathrm{U})(\xi)$ ได้ซึ่งจะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อตัวดำเนินการ Q_1 มีจุดตรึง

แบบจำลอง VOFF-BEP ภายใต้เคอร์แนลเป็นเลขชี้กำลังแบบถดถอย

พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นร่วมกับอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนภายใต้เคอร์เนลเป็นเลขชี้กำลังแบบถดถอย ${}^{\mathrm{FFE}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{FFE}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{S}^*(\xi) &= \mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFE}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{B}^*(\xi) &= \mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFE}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{E}^*(\xi) &= \mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \end{aligned} \tag{3.11}$$

เมื่อ $\mathrm{G}_i(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)$ ถูกกำหนดโดย (3.1)-(3.3) และ (3.4) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFE}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{V}(\xi) = \mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi)) \\ \mathrm{V}(0) = \mathrm{V}_0 \geq 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

เมื่อ

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \mathrm{S}^*(\xi) \\ \mathrm{B}^*(\xi) \\ \mathrm{E}^*(\xi) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{V}(0) = \begin{pmatrix} \mathrm{S}^*(0) \\ \mathrm{B}^*(0) \\ \mathrm{E}^*(0) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}^*(\xi)) = \begin{pmatrix} \mathrm{G}_1(\xi) \\ \mathrm{G}_2(\xi) \\ \mathrm{G}_3(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ \mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ \mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

แบบจำลอง (3.11) สามารถเขียนใหม่ในรูปแบบโวล์เทอร์รา (Volterra) ได้เนื่องจากปริพันธ์เศษส่วนสามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน ในรูปแบบของคาพูโต-ฟาบริซิโอของแบบจำลอง (3.11) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFE}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{S}^*(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFE}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{B}^*(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFE}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{E}^*(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \end{cases} \tag{3.14}$$

เพื่อความสะดวก จะเขียนสมการ (3.14) ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFE}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{V}(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi)) \\ \mathrm{V}(0)=\mathrm{V}_0\ge 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

ในการใช้เงื่อนไขเริ่มต้น จะต้องทำการแทนที่ตัวดำเนินการ ${}^{\mathrm{FFE}\square\mathrm{L}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ ด้วย ${}^{\mathrm{FFE}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ และใช้ปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน (2.8) กับสมการ (3.15) ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\mathrm{V}(\xi)=\mathrm{V}_0+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi))+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{V}(s))ds. \tag{3.16}$$

ในการวิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงคุณภาพของแบบจำลอง จะกำหนดให้ $\mathrm{X}_2=\mathrm{C}([0,\mathrm{T}^*]\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ เป็นปริภูมิบานาค โดยที่

$$\|\mathrm{V}\|=\|(\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\|=\sup_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]}\left|\mathrm{S}^*(\xi)+\mathrm{B}^*(\xi)+\mathrm{E}^*(\xi)\right|,\quad \mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*\in\mathrm{X}_2$$

ต่อไปจะกำหนดให้ตัวดำเนินการ (การส่ง) $\mathrm{Q}_2:\mathrm{X}_2\to\mathrm{X}_2$ ดังนี้

$$\begin{aligned}(\mathrm{Q}_2\mathrm{V})(\xi)=\mathrm{V}_0&+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi)) \\ &+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{V}(s))ds.\end{aligned} \tag{3.17}$$

ดังนั้นจะได้ว่าสมการ (3.9) สามารถเขียนได้ในนนรูปปัญหาจุดตรึง $\mathrm{V}(\xi)=(\mathrm{Q}_2\mathrm{V})(\xi)$ ได้ซึ่งจะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อตัวดำเนินการ Q_2 มีจุดตรึง

แบบจำลอง VOFF-BEP ภายใต้เคอร์แนลฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์

พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นร่วมกับอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนภายใต้เคอร์เนลฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์ ${}^{\mathrm{FFM}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{FFM}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{S}^*(\xi)&=\mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFM}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{B}^*(\xi)&=\mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFM}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{E}^*(\xi)&=\mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \end{aligned} \tag{3.18}$$

เมื่อ $\mathrm{G}_i(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)$ ถูกกำหนดโดย (3.1)-(3.3) และ (3.4) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFM}}_{\ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{W}(\xi)=\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi)) \\ \mathrm{W}(0)=\mathrm{W}_0\geq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

เมื่อ

$$\mathrm{W}=\begin{pmatrix}\mathrm{S}^*(\xi)\\ \mathrm{B}^*(\xi)\\ \mathrm{E}^*(\xi)\end{pmatrix},\quad \mathrm{W}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{S}^*(0)\\ \mathrm{B}^*(0)\\ \mathrm{E}^*(0)\end{pmatrix},\quad \mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}^*(\xi))=\begin{pmatrix}\mathrm{G}_1(\xi)\\ \mathrm{G}_2(\xi)\\ \mathrm{G}_3(\xi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\\ \mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\\ \mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\end{pmatrix} \tag{3.20}$$

แบบจำลอง (3.18) สามารถเขียนใหม่ในรูปแบบโวล์เทอร์รา (Volterra) ได้เนื่องจากปริพันธ์เศษส่วนสามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นอนุพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วนในรูปแบบของอาตานกานา-แบลีนูของแบบจำลอง (3.18) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFML}}_{\ \ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{S}^*(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFML}}_{\ \ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{B}^*(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ {}^{\mathrm{FFML}}_{\ \ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{E}^*(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \end{cases} \tag{3.21}$$

เพื่อความสะดวก จะเขียนสมการ (3.21) ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFML}}_{\ \ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{V}(\xi)=\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi)) \\ \mathrm{W}(0)=\mathrm{W}_0\geq 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

ในการใช้เงื่อนไขเริ่มต้น จะต้องทำการแทนที่ตัวดำเนินการ ${}^{\mathrm{FFML}}_{\ \ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ ด้วย ${}^{\mathrm{FFM}}_{\ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}$ และใช้ปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน (2.9) กับสมการ (3.22) ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\xi)=\mathrm{W}_0&+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi))\\ &+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))ds\end{aligned} \tag{3.23}$$

ในการวิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงคุณภาพของแบบจำลอง จะ กำหนดให้ $\mathrm{X}_3=\mathrm{C}([0,\mathrm{T}^*]\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ เป็นปริภูมิบานาค โดยที่

$$\|\mathrm{W}\|=\|(\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\|=\sup_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]}\left|\mathrm{S}^*(\xi)+\mathrm{B}^*(\xi)+\mathrm{E}^*(\xi)\right|,\quad \mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*\in\mathrm{X}_2$$

ต่อไปจะกำหนดให้ตัวดำเนินการ (การส่ง) $\mathrm{Q}_3:\mathrm{X}_3\to\mathrm{X}_3$ ดังนี้

$$\begin{aligned}(\mathrm{Q}_3\mathrm{W})(\xi)=\mathrm{W}_0&+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi))\\ &+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))ds\end{aligned} \tag{3.24}$$

ดังนั้นจะได้ว่าสมการ (3.9) สามารถเขียนได้ในรูปปัญหาจุดตรึง $\mathrm{W}(\xi)=(\mathrm{Q}_3\mathrm{W})(\xi)$ ได้ซึ่งจะมีผลเฉลยก็ต่อเมื่อตัวดำเนินการ Q_3 มีจุดตรึง

ทฤษฎีบทการมีเพียงคำตอบเดียว

ในทฤษฎีบทแรก จะนำเสนอทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของคำตอบสำหรับแบบจำลอง **VOFF-BEP** (3.4) โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจุดตรึงบานาค (Banach's fixed point theorem)

ทฤษฎีบท 3.1 ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีเพียงคำตอบเดียวของ (3.4)
สมมติให้ $\mathrm{G}\in \mathrm{X}_1$ ที่สอดคล้องกับ (A_1) จะมีค่าคงที่ $\mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}<1$ ที่ทำให้ $$\left\|\mathrm{G}(\xi,\mathrm{U}_1(\xi))-\mathrm{G}(\xi,\mathrm{U}_2(\xi))\right\|\le \mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}\left\|\mathrm{U}_1(\xi)-\mathrm{U}_2(\xi)\right\|$$ สำหรับ $\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2\in \mathrm{X}_1$ และ $\xi\in[0,\mathrm{T}^*]$ ถ้า $$\frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}<1 \qquad (3.25)$$ แล้ว แบบจำลอง **VOFF-BEP** (3.4) มีคำตอบเดียว

พิสูจน์ ให้ G_1^* เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบที่ซึ่ง $\sup\limits_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]}|\mathrm{G}(\xi,0)|=\mathrm{G}_1^*<+\infty$, $\alpha^*=\sup\limits_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]}\{\alpha(\xi)\}$ และ $\beta^*=\sup\limits_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]}\{\beta(\xi)\}$ กำหนดให้เซตนูนปิดที่มีขอบเขต $\mathrm{D}_{r_1}=\left\{\mathrm{U}\in \mathrm{X}_1:\|\mathrm{U}\|_{\mathrm{X}_1}\le r_1\right\}$ โดยที่

$$r_1\ge \frac{\|\mathrm{U}_0\|_{\mathrm{X}_1}+\dfrac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\mathrm{G}_1^*}{1-\dfrac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}}$$

สำหรับการพิสูจน์จะถูกแบ่งออกทเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จะแสดงว่า $\mathrm{Q}_1\mathrm{D}_{r_1}\subset \mathrm{D}_{r_1}$

สำหรับแต่ละ $\mathrm{U}\in \mathrm{D}_{r_1}$ จะได้

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{Q}_1\mathrm{U})(\xi)| &\le |\mathrm{U}_0|+\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^\xi s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}|\mathrm{G}(s,\mathrm{U}(s))|\,ds\\
&\le |\mathrm{U}_0|+\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha^*)}\int_0^\xi s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\Big[|\mathrm{G}(s,\mathrm{U}(s))-\mathrm{G}(s,0)|+|\mathrm{G}(s,\mathrm{U}(s))|\Big]ds\\
&\le \|\mathrm{U}_0\|_{\mathrm{X}_1}+\frac{\beta^*\xi^{\alpha^*+\beta^*-2}}{\Gamma(\alpha^*)}\int_0^\xi\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta(\xi)-1}\left(1-\frac{s}{\xi}\right)^{\alpha(\xi)-1}ds\left[\mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}r_1+\mathrm{G}_1^*\right]\\
&\le \|\mathrm{U}_0\|_{\mathrm{X}_1}+\frac{\beta^*\xi^{\alpha^*+\beta^*-1}}{\Gamma(\alpha^*)}\int_0^1 u^{\beta(\xi)-1}(1-u)^{\alpha(\xi)-1}du\left[\mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}r_1+\mathrm{G}_1^*\right]\\
&\le \|\mathrm{U}_0\|_{\mathrm{X}_1}+\frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\left[\mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}r_1+\mathrm{G}_1^*\right]
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $\mathrm{Q}_1\mathrm{D}_{r_1}\subset \mathrm{D}_{r_1}$

ขั้นตอนที่ 2 จะแสดงว่า ตัวดำเนินการ Q_1 เป็นตัวดำเนินการแบบหดตัว

ให้ $U_1, U_2 \in D_{r_1}$ และ $\xi \in [0, T^*]$ จะได้

$$\begin{aligned}|(Q_1U_1)(\xi) - (Q_1U_2)(\xi)| &\le \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi - s)^{\alpha(\xi)-1}|G(s, U_1(s)) - G(s, U_2(s))|ds \\ &\le \frac{\beta^*(T^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)} L_{G_U} \|U_1 - U_2\|_{X_1}\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้

$$\|Q_1U_1 - Q_1U_2\|_{X_1} \le \frac{\beta^*(T^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)} L_{G_U} \|U_1 - U_2\|_{X_1}$$

เนื่องจาก $\frac{\beta^*(T^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)} L_{G_U} < 1$ และจากหลักการหดตัวของบานาค (ทฤษฎีบท 2.2.1) จะได้ Q_1 เป็นตัวดำเนินการแบบหดตัว ฉะนั้น จากทฤษฎีบทจุดตรึงบานาคยืนยันว่าตัวดำเนินการ Q_1 มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวที่ซึ่งเป็นคำตอบเพียงคำตอบเดียวของแบบจำลอง (3.4) □

ต่อไป จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจุดตรึงบานาคเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของคำตอบสำหรับแบบจำลอง VOFF-BEP (3.11)

ทฤษฎีบท 3.2 ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีเพียงคำตอบเดียวของ (3.11)

สมมติให้ $G \in X_2$ ที่สอดคล้องกับ

(A_2) จะมีค่าคงที่ $L_{G_V} < 1$ ที่ทำให้

$$|G(\xi, V_1(\xi)) - G(\xi, V_2(\xi))| \le L_{G_V} |V_1(\xi) - V_2(\xi)|$$

สำหรับ $V_1, V_2 \in X_2$ และ $\xi \in [0, T^*]$

ถ้า

$$\left(\frac{\beta^*\xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)} + \frac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right) L_{G_V} < 1 \qquad (3.26)$$

แล้ว แบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) มีคำตอบเดียว

พิสูจน์ ให้ G_2^* เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบที่ซึ่ง $\sup_{\xi\in[0,T^*]} |G(\xi,0)| = G_2^* < +\infty$, $\alpha^* = \sup_{\xi\in[0,T^*]}\{\alpha(\xi)\}$, $\alpha_* = \inf_{\xi\in[0,T^*]}\{\alpha(\xi)\}$ และ $\beta^* = \sup_{\xi\in[0,T^*]}\{\beta(\xi)\}$ กำหนดให้เซตนูนปิดที่มีขอบเขต $D_{r_2} = \left\{V \in X_2 : \|V\|_{X_2} \le r_2\right\}$ โดยที่

$$r_2 \geq \frac{\left\|V_0\right\|_{X_2} + \left(\dfrac{\beta^* \xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)} + \dfrac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right) G_2^*}{1-\left(\dfrac{\beta^* \xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)} + \dfrac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right) L_{G_V}}$$

สำหรับการพิสูจน์จะถูกแบ่งออกทเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จะแสดงว่า $Q_2 D_{r_2} \subset D_{r_2}$

สำหรับแต่ละ $V \in D_{r_2}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\left|(Q_2 V)(\xi)\right| &\leq \left|V_0\right| + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}\left|G(\xi, V(\xi))\right| + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\left|G(s, V(s))\right| ds \\
&\leq \left|V_0\right| + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}\left[\left|G(\xi, V(\xi)) - G(\xi, 0)\right| + \left|G(\xi, V(\xi))\right|\right] \\
&\quad + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\left[\left|G(s, V(s)) - G(s, 0)\right| + \left|G(s, V(s))\right|\right] ds \\
&\leq \left\|V_0\right\|_{X_2} + \frac{\beta^* \xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)}\left[L_{G_V} r_2 + G_2^*\right] + \frac{\alpha^* \beta^*}{M(\alpha^*)}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1} ds \left[L_{G_V} r_2 + G_2^*\right] \\
&\leq \left\|V_0\right\|_{X_2} + \left(\frac{\beta^* \xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)} + \frac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right)\left[L_{G_V} r_2 + G_2^*\right]
\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $Q_2 D_{r_2} \subset D_{r_2}$

ขั้นตอนที่ 2 จะแสดงว่า ตัวดำเนินการ Q_2 เป็นตัวดำเนินการแบบหดตัว

ให้ $V_1, V_2 \in D_{r_2}$ และ $\xi \in [0, T^*]$ จะได้

$$\begin{aligned}
\left|(Q_2 V_1)(\xi) - (Q_2 V_2)(\xi)\right| &\leq \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}\left|G(\xi, V_1(\xi)) - G(\xi, V_2(\xi))\right| \\
&\quad + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\left|G(s, V_1(s)) - G(s, V_2(s))\right| ds \\
&\leq \left(\frac{\beta^* \xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)} + \frac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right) L_{G_V} \left\|V_1 - V_2\right\|_{X_2}
\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้

$$\left\|Q_2 V_1 - Q_2 V_2\right\|_{X_2} \leq \left(\frac{\beta^* \xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)} + \frac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right) L_{G_V} \left\|V_1 - V_2\right\|_{X_2}$$

เนื่องจาก $\left(\dfrac{\beta^* \xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)} + \dfrac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right) L_{G_V} < 1$ และจากหลักการหดตัวของบานาค (ทฤษฎีบท 2.2.1) จะได้ Q_2 เป็นตัวดำเนินการแบบหดตัว ฉะนั้น จากทฤษฎีบทจุดตรึงบานาคยืนยันว่าตัวดำเนินการ Q_2 มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวที่ซึ่งเป็นคำตอบเพียงคำตอบเดียวของแบบจำลอง (3.11) $\square$

สุดท้ายนี้ จะ เพื่อพิสูจน์ ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของคำตอบสำหรับแบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 3.2 ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีเพียงคำตอบเดียวของ (3.18)

สมมติให้ $\mathrm{G} \in \mathrm{X}_3$ ที่สอดคล้องกับ

(A_3) จะมีค่าคงที่ $\mathrm{L}_{\mathrm{G_W}} < 1$ ที่ทำให้

$$\left|\mathrm{G}(\xi, \mathrm{W}_1(\xi)) - \mathrm{G}(\xi, \mathrm{W}_2(\xi))\right| \le \mathrm{L}_{\mathrm{G_W}} \left|\mathrm{W}_1(\xi) - \mathrm{W}_2(\xi)\right|$$

สำหรับ $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2 \in \mathrm{X}_3$ และ $\xi \in [0, \mathrm{T}^*]$

ถ้า

$$\left(\frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\beta^*-1}(1-\alpha^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)} + \frac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_W}} < 1 \tag{3.26}$$

แล้ว แบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) มีคำตอบเดียว

พิสูจน์ ให้ G_3^* เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบที่ซึ่ง $\sup_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]} \left|\mathrm{G}(\xi, 0)\right| = \mathrm{G}_3^* < +\infty$, $\alpha^* = \sup_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]} \{\alpha(\xi)\}$, $\alpha_* = \inf_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]} \{\alpha(\xi)\}$ และ $\beta^* = \sup_{\xi\in[0,\mathrm{T}^*]} \{\beta(\xi)\}$ กำหนดให้เซตนูนปิดที่มีขอบเขต $\mathrm{D}_{r_3} = \left\{\mathrm{W} \in \mathrm{X}_3 : \|\mathrm{W}\|_{\mathrm{X}_3} \le r_3\right\}$ โดยที่

$$r_3 \ge \frac{\|\mathrm{W}_0\|_{\mathrm{X}_3} + \left(\dfrac{\beta^*\xi_{\min}{}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)} + \dfrac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)}{1 - \left(\dfrac{\beta^*\xi_{\min}{}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)} + \dfrac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_W}}}$$

สำหรับการพิสูจน์จะถูกแบ่งออกทเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จะแสดงว่า $\mathrm{Q}_3\mathrm{D}_{r_3} \subset \mathrm{D}_{r_3}$

สำหรับแต่ละ $\mathrm{W} \in \mathrm{D}_{r_3}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
|(\mathrm{Q}_3\mathrm{W})(\xi)| &\le |\mathrm{W}_0| + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}|\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi))| \\
&\quad + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}|\mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))|\,ds \\
&\le |\mathrm{W}_0| + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\Big[|\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi))-\mathrm{G}(\xi,0)| + |\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi))|\Big] \\
&\quad + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\Big[|\mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))-\mathrm{G}(s,0)| + |\mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))|\Big]ds \\
&\le \|\mathrm{W}_0\|_{\mathrm{X}_3} + \frac{\beta^*\xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] \\
&\quad + \frac{\alpha^*\beta^*}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*)}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}ds\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] \\
&\le \|\mathrm{W}_0\|_{\mathrm{X}_3} + \frac{\beta^*\xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] \\
&\quad + \frac{\alpha^*\beta^*\xi^{\alpha^*+\beta^*-2}}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*)}\int_0^{\xi}\left(\frac{s}{\xi}\right)^{\beta(\xi)-1}\left(1-\frac{s}{\xi}\right)^{\alpha(\xi)-1} ds\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] \\
&\le \|\mathrm{W}_0\|_{\mathrm{X}_3} + \frac{\beta^*\xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] \\
&\quad + \frac{\alpha^*\beta^*\xi^{\alpha^*+\beta^*-1}}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*)}\int_0^{1} u^{\beta(\xi)-1}(1-u)^{\alpha(\xi)-1} du\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] \\
&\le \|\mathrm{W}_0\|_{\mathrm{X}_3} + \frac{\beta^*\xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] + \frac{\alpha^*\beta^*\xi^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big] \\
&\le \|\mathrm{W}_0\|_{\mathrm{X}_3} + \left(\frac{\beta^*\xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)} + \frac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)\Big[\mathrm{L}_{\mathrm{G}_\mathrm{W}} r_3 + \mathrm{G}_3^*\Big]
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า $\mathrm{Q}_3\mathrm{D}_{r_3} \subset \mathrm{D}_{r_3}$

ขั้นตอนที่ 2 จะแสดงว่า ตัวดำเนินการ Q_3 เป็นตัวดำเนินการแบบหดตัว

ให้ $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2 \in \mathrm{D}_{r_3}$ และ $\xi \in [0,\mathrm{T}^*]$ จะได้

$$
\begin{aligned}
&\left|(\mathrm{Q}_3\mathrm{W}_1)(\xi)-(\mathrm{Q}_3\mathrm{W}_2)(\xi)\right| \\
&\le \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\left|\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}_1(\xi))-\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}_2(\xi))\right| \\
&\quad+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\left|\mathrm{G}(s,\mathrm{W}_1(s))-\mathrm{G}(s,\mathrm{W}_2(s))\right|ds \\
&\le \left(\frac{\beta^*\xi_{\min^{\beta^*-1}}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}+\frac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_w}}\left\|\mathrm{W}_1-\mathrm{W}_2\right\|_{\mathrm{X}_3}
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะได้

$$
\left\|\mathrm{Q}_3\mathrm{W}_1-\mathrm{Q}_3\mathrm{W}_2\right\|_{\mathrm{X}_3}\le\left(\frac{\beta^*\xi_{\min^{\beta^*-1}}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}+\frac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_w}}\left\|\mathrm{W}_1-\mathrm{W}_2\right\|_{\mathrm{X}_3}
$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\beta^*-1}(1-\alpha^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}+\frac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_w}}<1$ และจากหลักการหดตัวของบานาค (ทฤษฎีบท 2.2.1) จะได้ Q_3 เป็นตัวดำเนินการแบบหดตัว ฉะนั้น จากทฤษฎีบทจุดตรึงบานาคยืนยันว่าตัวดำเนินการ Q_3 มีจุดตรึงเพียงจุดเดียวที่ซึ่งเป็นคำตอบเพียงคำตอบเดียวของแบบจำลอง (3.18) $\square$