บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในบทนี้ เราจะวิเคราะห์เงื่อนไขเพียงพอสำหรับความมีเสถียรภาพอูแลมประเภทต่าง ๆ ของคำตอบสำหรับแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4), (3.11) และ (3.18)

ให้ $\kappa_{G_U}, \kappa_{G_V}, \kappa_{G_W} > 0$ เป็นค่าคงที่ และฟังก์ชัน $P_{G_U}, P_{G_V}, P_{G_W} \in C([0,T^*], \square^+)$ พิจารณาอสมการต่อไปนี้

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} U(\xi) - G(\xi, U(\xi)) \right| \le \kappa_{G_U} \tag{4.1}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} V(\xi) - G(\xi, V(\xi)) \right| \le \kappa_{G_V} \tag{4.2}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} W(\xi) - G(\xi, W(\xi)) \right| \le \kappa_{G_W} \tag{4.3}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} U(\xi) - G(\xi, U(\xi)) \right| \le \kappa_{G_U} P_{G_U}(\xi) \tag{4.4}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} V(\xi) - G(\xi, V(\xi)) \right| \le \kappa_{G_V} P_{G_V}(\xi) \tag{4.5}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} W(\xi) - G(\xi, W(\xi)) \right| \le \kappa_{G_W} P_{G_W}(\xi) \tag{4.6}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} U(\xi) - G(\xi, U(\xi)) \right| \le P_{G_U}(\xi) \tag{4.7}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} V(\xi) - G(\xi, V(\xi)) \right| \le P_{G_V}(\xi) \tag{4.8}$$

$$\left| {}^{\mathrm{FFP}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} W(\xi) - G(\xi, W(\xi)) \right| \le P_{G_W}(\xi) \tag{4.9}$$

โดยที่ $\xi \in [0, T^*], \kappa_{G_U} = \max(\kappa_{G_{U_j}})^T, \kappa_{G_V} = \max(\kappa_{G_{V_j}})^T$ และ $\kappa_{G_W} = \max(\kappa_{G_{W_j}})^T$ สำหรับ $j = 1, 2, 3$

นิยาม 4.1
แบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ ถ้ามีค่าคงที่ $\Phi_{G_U} > 0$ ที่สำหรับ $\kappa_{G_U} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $\square_U \in X_1$ ของ (4.1) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.5) โดยที่ $$\left| \square_U(\xi) - U(\xi) \right| \le \Phi_{G_U} \kappa_{G_U}, \tag{4.10}$$ เมื่อ $\xi \in [0, T^*]$ และ $\Phi_{G_U} = \max(\Phi_{G_{U_i}})^T, i = 1,2,3.$

นิยาม 4.2
แบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ ถ้ามีค่าคงที่ $\Phi_{G_W} > 0$ ที่สำหรับ $\kappa_{G_V} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $\square_V \in X_2$ ของ (4.2) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.12) โดยที่ $$\left| \square_V(\xi) - V(\xi) \right| \le \Phi_{G_V} \kappa_{G_V}, \tag{4.11}$$ เมื่อ $\xi \in [0, T^*]$ และ $\Phi_{G_V} = \max(\Phi_{G_{V_i}})^T, i = 1,2,3.$

นิยาม 4.3

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ ถ้ามีค่าคงที่ $\Phi_{G_W} > 0$ ที่สำหรับ $\kappa_{G_W} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $□_{W} \in X_3$ ของ (4.3) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.19) โดยที่

$$|□_{W}(\xi) - W(\xi)| \le \Phi_{G_W} \kappa_{G_W}, \tag{4.12}$$

เมื่อ $\xi \in [0, T^*]$ และ $\Phi_{G_W} = \max(\Phi_{G_{W_i}})^T,\ i = 1,2,3.$

นิยาม 4.4

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ทั่วไป ถ้ามีฟังก์ชัน $P_{G_U} \in C([0,T^*], □^+)$ โดยที่ $P_{G_U}(0) = 0$ ที่ทำให้สำหรับ $\kappa_{G_U} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $□_{U} \in X_1$ ของ (4.4) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.5) โดยที่

$$|□_{U}(\xi) - U(\xi)| \le P_{G_U}(\kappa_{G_U}), \tag{4.13}$$

เมื่อ $\xi \in [0, T^*]$ และ $P_{G_U} = \max(P_{G_{U_i}})^T,\ i = 1,2,3.$

นิยาม 4.5

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ทั่วไป ถ้ามีฟังก์ชัน $P_{G_V} \in C([0,T^*], □^+)$ โดยที่ $P_{G_V}(0) = 0$ ที่ทำให้สำหรับ $\kappa_{G_V} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $□_{V} \in X_2$ ของ (4.5) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.12) โดยที่

$$|□_{V}(\xi) - V(\xi)| \le P_{G_V}(\kappa_{G_V}), \tag{4.14}$$

เมื่อ $\xi \in [0, T^*]$ และ $P_{G_V} = \max(P_{G_{V_i}})^T,\ i = 1,2,3.$

นิยาม 4.6

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ทั่วไป ถ้ามีฟังก์ชัน $P_{G_W} \in C([0,T^*], □^+)$ โดยที่ $P_{G_W}(0) = 0$ ที่ทำให้สำหรับ $\kappa_{G_W} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $□_{W} \in X_3$ ของ (4.6) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.19) โดยที่

$$|□_{W}(\xi) - W(\xi)| \le P_{G_W}(\kappa_{G_W}), \tag{4.15}$$

เมื่อ $\xi \in [0, T^*]$ และ $P_{G_W} = \max(P_{G_{W_i}})^T,\ i = 1,2,3.$

นิยาม 4.7

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส เทียบกับ $P_{G_U} \in C([0,T^*], □^+)$ ถ้ามีค่าคงที่ $\Omega_{G_U} > 0$ ที่ทำให้สำหรับ $\kappa_{G_U} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $□_{U} \in X_1$ ของ (4.4) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.5) โดยที่

$$\left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{U}(\xi)\right| \leq \Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} \kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} \mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}}(\xi), \tag{4.16}$$

เมื่อ $\xi \in [0,\mathrm{T}^*]$, $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} = \max(\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}})^T$, และ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}})^T$, $i = 1,2,3.$

นิยาม 4.8

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส เทียบกับ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} \in C([0,\mathrm{T}^*],\square^{+})$ ถ้ามีค่าคงที่ $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} > 0$ ที่ทำให้สำหรับ $\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $\square_{\mathrm{V}} \in \mathrm{X}_2$ ของ (4.5) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.12) โดยที่

$$\left|\square_{\mathrm{V}}(\xi)-\mathrm{V}(\xi)\right| \leq \Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} \kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} \mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}}(\xi), \tag{4.17}$$

เมื่อ $\xi \in [0,\mathrm{T}^*]$, $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} = \max(\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}_i}})^T$ และ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}_i}})^T$, $i = 1,2,3$

นิยาม 4.9

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส เทียบกับ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}} \in C([0,\mathrm{T}^*],\square^{+})$ ถ้ามีค่าคงที่ $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}} > 0$ ที่ทำให้สำหรับ $\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}} > 0$ และสำหรับทุก ๆ คำตอบ $\square_{\mathrm{W}} \in \mathrm{X}_3$ ของ (4.6) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.19) โดยที่

$$\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{W}(\xi)\right| \leq \Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}} \kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}} \mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}}(\xi), \tag{4.18}$$

เมื่อ $\xi \in [0,\mathrm{T}^*]$, $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}} = \max(\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}_i}})^T$ และ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{W}_i}})^T$, $i = 1,2,3.$

นิยาม 4.10

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียสทั่วไป เทียบกับ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} \in C([0,\mathrm{T}^*],\square^{+})$ ถ้ามีค่าคงที่ $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก ๆ คำตอบ $\square_{\mathrm{U}} \in \mathrm{X}_1$ ของ (4.7) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.5) โดยที่

$$\left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{U}(\xi)\right| \leq \Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} \mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}}(\xi), \tag{4.19}$$

เมื่อ $\xi \in [0,\mathrm{T}^*]$, $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} = \max(\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}})^T$ และ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}})^T$, $i = 1,2,3.$

นิยาม 4.11

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียสทั่วไป เทียบ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} \in C([0,\mathrm{T}^*],\square^{+})$ ถ้ามีค่าคงที่ $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก ๆ คำตอบ $\square_{\mathrm{V}} \in \mathrm{X}_2$ ของ (4.8) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.12) โดยที่

$$\left|\square_{\mathrm{V}}(\xi)-\mathrm{V}(\xi)\right| \leq \Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} \mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}}(\xi), \tag{4.20}$$

เมื่อ $\xi \in [0,\mathrm{T}^*]$, $\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} = \max(\Omega_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}_i}})^T$ และ $\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}_i}})^T$, $i = 1,2,3.$

นิยาม 4.12

แบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียสทั่วไป เทียบ

$\mathrm{P}_{\mathrm{G_W}} \in C([0,\mathrm{T}^*],□^+)$ ถ้ามีค่าคงที่ $\Omega_{\mathrm{G_W}} > 0$ ที่ทำให้สำหรับทุก ๆ คำตอบ $□_{\mathrm{W}} \in \mathrm{X}_3$ ของ (4.9) จะมีคำตอบหนึ่งของ (3.19) โดยที่

$$\left|□_{\mathrm{W}}(\xi) - \mathrm{W}(\xi)\right| \le \Omega_{\mathrm{G_W}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_W}}(\xi), \tag{4.21}$$

เมื่อ $\xi \in [0,\mathrm{T}^*]$, $\Omega_{\mathrm{G_W}} = \max(\Omega_{\mathrm{G_{W_i}}})^T$ และ $\mathrm{P}_{\mathrm{G_W}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G_{W_i}}})^T$, $i = 1,2,3.$

บทแทรก 4.1

$□_{\mathrm{U}} \in \mathrm{X}_1$, $□_{\mathrm{V}} \in \mathrm{X}_2$, $□_{\mathrm{W}} \in \mathrm{X}_3$ เป็นคำตอบของ (4.1), (4.2) และ (4.3) ตามลำดับ ก็ต่อเมื่อ มี $\chi_{\mathrm{U}} \in \mathrm{X}_1$, $\chi_{\mathrm{V}} \in \mathrm{X}_2$, $\chi_{\mathrm{W}} \in \mathrm{X}_3$ โดยที่ $\chi_{\mathrm{U}}(0) = 0$, $\chi_{\mathrm{V}}(0) = 0$, $\chi_{\mathrm{W}}(0) = 0$ ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(B_1) $\left|\chi_{\mathrm{U}}(\xi)\right| \le \kappa_{\mathrm{G_U}}$ \$, โดยที่ $\chi_{\mathrm{U}} = \max(\chi_{\mathrm{U}_i})^T$, $(i = 1,2,3)$, สำหรับ $\kappa_{\mathrm{G_U}} > 0$ และ ${}^{\mathrm{FFP}}_{\ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{U}(\xi) = \mathrm{G}(\xi,\mathrm{U}(\xi)) + \chi_{\mathrm{U}}(\xi).$

(B_2) $\left|\chi_{\mathrm{V}}(\xi)\right| \le \kappa_{\mathrm{G_V}}$ โดยที่ $\chi_{\mathrm{V}} = \max(\chi_{\mathrm{V}_i})^T, (i = 1,2,3)$, สำหรับ $\kappa_{\mathrm{G_V}} > 0$, และ ${}^{\mathrm{FFE}}_{\ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{V}(\xi) = \mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi)) + \chi_{\mathrm{V}}(\xi)$

(B_3) $\left|\chi_{\mathrm{W}}(\xi)\right| \le \kappa_{\mathrm{G_W}}$ โดยที่ $\chi_{\mathrm{W}} = \max(\chi_{\mathrm{W}_i})^T, (i = 1,2,3)$, สำหรับ $\kappa_{\mathrm{G_W}} > 0$ และ ${}^{\mathrm{FFM}}_{\ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{W}(\xi) = \mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi)) + \chi_{\mathrm{W}}(\xi).$

บทแทรก 4.2

$□_{\mathrm{U}} \in \mathrm{X}_1$, $□_{\mathrm{V}} \in \mathrm{X}_2$, $□_{\mathrm{W}} \in \mathrm{X}_3$ เป็นคำตอบของ (4.4), (4.5) และ (4.6) ตามลำดับ ก็ต่อเมื่อ มี $\psi_{\mathrm{U}} \in \mathrm{X}_1$, $\psi_{\mathrm{V}} \in \mathrm{X}_2$, $\psi_{\mathrm{W}} \in \mathrm{X}_3$ ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(C_1) $\left|\psi_{\mathrm{U}}(\xi)\right| \le \kappa_{\mathrm{G_U}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_U}}(\xi)$, $\psi_{\mathrm{U}} = \max(\psi_{\mathrm{U}_i})^T$, $\mathrm{P}_{\mathrm{G_U}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G_{U_i}}})^T$

สำหรับ $i = 1,2,3$ และ ${}^{\mathrm{FFP}}_{\ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{U}(\xi) = \mathrm{G}(\xi,\mathrm{U}(\xi)) + \psi_{\mathrm{U}}(\xi)$

(C_2) $\left|\psi_{\mathrm{V}}(\xi)\right| \le \kappa_{\mathrm{G_V}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_V}}(\xi)$, $\psi_{\mathrm{V}} = \max(\psi_{\mathrm{V}_i})^T$, $\mathrm{P}_{\mathrm{G_V}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G_{V_i}}})^T$

สำหรับ $i = 1,2,3$ และ ${}^{\mathrm{FFE}}_{\ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{V}(\xi) = \mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi)) + \psi_{\mathrm{V}}(\xi)$

(C_3) $\left|\psi_{\mathrm{W}}(\xi)\right| \le \kappa_{\mathrm{G_W}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_W}}(\xi)$, $\psi_{\mathrm{W}} = \max(\psi_{\mathrm{W}_i})^T$, $\mathrm{P}_{\mathrm{G_W}} = \max(\mathrm{P}_{\mathrm{G_{W_i}}})^T$

สำหรับ $i = 1,2,3$ และ ${}^{\mathrm{FFM}}_{\ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\mathrm{W}(\xi) = \mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi)) + \psi_{\mathrm{W}}(\xi)$

4.1 ทฤษฎีบทความมีเสถียรภาพของคำตอบประเภทอูแลม-ไฮเออร์ของแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4), (3.11) และ (3.18)

ทฤษฎีบท 4.1

ให้ $□_{\mathrm{U}} \in \mathrm{X}_1$ เป็นคำตอบของ (4.1) แล้ว

$$\left|□_{\mathrm{U}}(\xi) - \mathrm{G}_{□_{\mathrm{U}}}(\xi)\right| \le \frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\kappa_{\mathrm{G_U}} \tag{4.22}$$

โดยที่

$$\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{U}}}(\xi)=\square_{\mathrm{U}_0}+\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{U}}(s))ds \qquad (4.23)$$

พิสูจน์ ให้ $\square_{\mathrm{U}}$ เป็นคำตอบของ (4.1)

จากเงื่อนไข (B_1) จากบทแทรก 4.1 จะได้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFP}}_{\ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\square_{\mathrm{U}}(\xi)=\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{U}}(\xi))+\chi_{\mathrm{U}}(\xi), \\ \square_{\mathrm{U}}(0)=\square_{\mathrm{U}_0}\ge 0 \end{cases} \qquad (4.24)$$

ดังนั้น คำตอบของ (4.24) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned}\square_{\mathrm{U}}(\xi)=\square_{\mathrm{U}_0}&+\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{U}}(s))ds \\ &+\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\chi_{\mathrm{U}}(s)ds.\end{aligned} \qquad (4.25)$$

ทำให้ได้

$$\left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{U}}}(\xi)\right|\le\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\left|\chi_{\mathrm{U}}(s)\right|ds\le\frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}}$$

ซึ่งเป็นสมการ (4.23) ดังต้องการ

□

ทฤษฎีบท 4.2

ถ้า (A_1) และทฤษฎีบท 4.1 เป็นจริง แล้วแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์

พิสูจน์ ให้ $\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}}\in\square^{+}$ และ $\square_{\mathrm{U}}$ เป็นคำตอบของ (4.1)

สมมุติให้ $\mathrm{U}\in\mathrm{X}_1$ เป็นคำตอบเพียงหนึ่งเดียวของแบบจำลอง แล้วจะได้

$$\begin{aligned}\left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{U}(\xi)\right|&\le\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{U}_0-\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{U}(s))ds \\ &\le\left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\square_{\mathrm{U}_0}-\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{U}}(s))ds\right| \\ &\quad+\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\left|\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{U}}(s))-\mathrm{G}(s,\mathrm{U}(s))\right|ds \\ &\le\frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\left(\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}}+\mathrm{L}_{\mathrm{G}_{\mathrm{U}}}\left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{U}(\xi)\right|\right)\end{aligned}$$

โดยการเลือกค่าคงที่

$$\Phi_{G_U} := \frac{\dfrac{\beta^*(T^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}}{1-\dfrac{\beta^*(T^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}L_{G_U}}$$

ทำให้ได้ $|\square_U(\xi)-U(\xi)| \le \Phi_{G_U}\kappa_{G_U}$ ดังนั้นแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์

$\square$

บทแทรก 4.3
โดยการเลือกฟังก์ชัน $P_{G_U}(\xi)=\Phi_{G_U}\kappa_{G_U}$ โดยที่ $P_{G_U}(0)=0$ ในทฤษฎีบท 4.2 จะได้ว่า แบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ทั่วไป

ทฤษฎีบท 4.3

ให้ $\square_V \in X_2$ เป็นคำตอบของ (4.2) แล้ว

$$\left|\square_V(\xi)-G_{\square_V}(\xi)-\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}G(s,\square_V(s))ds\right| \le \left(\frac{\beta^*\xi_{\min}^{\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{M(\alpha^*)}+\frac{\alpha^*(T^*)^{\beta^*}}{M(\alpha^*)}\right)\kappa_{G_V} \tag{4.26}$$

โดยที่

$$G_{\square_V}(\xi)=\square_{V_0}+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}G(\xi,\square_V(\xi)) \tag{4.27}$$

พิสูจน์ ให้ $\square_V$ เป็นคำตอบของ (4.2)

จากเงื่อนไข (B_2) จากบทแทรก 4.1 จะได้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFE}}_{\ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\square_V(\xi)=G(\xi,\square_V(\xi))+\chi_V(\xi), \\ \square_V(0)=\square_{V_0}\ge 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

ดังนั้น คำตอบของ (4.28) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\square_V(\xi)=\square_{V_0}+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}G(\xi,\square_V(\xi))+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}G(s,\square_V(s))ds$$
$$+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}\chi_V(\xi)+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}\chi_V(s)ds$$

ทำให้ได้

$$
\begin{aligned}
&\left| \square_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{G}_{\square_{\mathrm{V}}}(\xi) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{V}}(s))ds \right| \\
&\qquad \le \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\left|\chi_{\mathrm{V}}(\xi)\right| + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\left|\chi_{\mathrm{V}}(s)\right|ds \\
&\qquad \le \left(\frac{\beta^{*}\xi_{\min\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{M}(\alpha^{*})} + \frac{\alpha^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\beta^{*}}}{\mathrm{M}(\alpha^{*})} \right)\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}}
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นสมการ (4.27) ดังต้องการ

$\square$

ทฤษฎีบท 4.4
ถ้า (A_2) และทฤษฎีบท 4.3 เป็นจริง แล้วแบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์

พิสูจน์ ให้ $\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} \in \square^{+}$ และ $\square_{\mathrm{V}}$ เป็นคำตอบของ (4.2)

สมมุติให้ $\mathrm{V} \in \mathrm{X}_2$ เป็นคำตอบเพียงหนึ่งเดียวของแบบจำลอง แล้วจะได้

$$
\begin{aligned}
&\left|\square_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{V}(\xi)\right| \\
&\le \left| \square_{\mathrm{U}}(\xi) - \mathrm{V}_0 - \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi)) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{V}(s))ds \right| \\
&\le \left| \square_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{G}_{\square_{\mathrm{V}}}(\xi) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{V}}(s))ds \right| \\
&\quad + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\left|\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{V}}(\xi)) - \mathrm{G}(\xi,\mathrm{V}(\xi))\right| \\
&\quad + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\left|\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{V}}(s)) - \mathrm{G}(s,\mathrm{V}(s))\right|ds
\end{aligned}
$$

$$
\left|\square_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{V}(\xi)\right| \le \left(\frac{\beta^{*}\xi_{\min\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{M}(\alpha^{*})} + \frac{\alpha^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\beta^{*}}}{\mathrm{M}(\alpha^{*})} \right)\left(\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} + \mathrm{L}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}}\left|\square_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{V}(\xi)\right|\right)
$$

โดยการเลือกค่าคงที่

$$
\Phi_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}} := \frac{\dfrac{\beta^{*}\xi_{\min\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{M}(\alpha^{*})} + \dfrac{\alpha^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\beta^{*}}}{\mathrm{M}(\alpha^{*})}}{1 - \left(\dfrac{\beta^{*}\xi_{\min\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{M}(\alpha^{*})} + \dfrac{\alpha^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\beta^{*}}}{\mathrm{M}(\alpha^{*})} \right)\mathrm{L}_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}}}
$$

ทำให้ได้ $\left|\square_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{V}(\xi)\right| \le \Phi_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}}\kappa_{\mathrm{G}_{\mathrm{V}}}$ ดังนั้นแบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์

$\square$

บทแทรก 4.4

โดยการเลือกฟังก์ชัน $\mathrm{P}_{\mathrm{G_v}}(\xi)=\Phi_{\mathrm{G_v}}\kappa_{\mathrm{G_v}}$ โดยที่ $\mathrm{P}_{\mathrm{G_v}}(0)=0$ ในทฤษฎีบท 4.4 จะได้ว่า แบบจำลอง $\mathbf{VOFF\text{-}BEP}$ (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ทั่วไป

ทฤษฎีบท 4.5

ให้ $\square_{\mathrm{W}}\in \mathrm{X}_3$ เป็นคำตอบของ (4.3) แล้ว

$$\begin{aligned}&\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{W}}}(\xi)-\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))ds\right|\\ &\qquad\leq\left(\frac{\beta^*\xi_{\min\beta^*-1}(1-\alpha_*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)}+\frac{\alpha^*\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1}\Gamma(\beta^*)}{\mathrm{AB}(\alpha^*)\Gamma(\alpha^*+\beta^*)}\right)\kappa_{\mathrm{G_W}}\end{aligned}\tag{4.29}$$

โดยที่

$$\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{W}}}(\xi)=\square_{\mathrm{W}_0}+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{W}}(\xi))\tag{4.30}$$

พิสูจน์ ให้ $\square_{\mathrm{W}}$ เป็นคำตอบของ (4.3)

จากเงื่อนไข (B_3) จากบทแทรก 4.1 จะได้

$$\begin{cases}{}^{\mathrm{FFM}}_{\ \ \xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\square_{\mathrm{W}}(\xi)=\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{W}}(\xi))+\chi_{\mathrm{W}}(\xi),\\ \square_{\mathrm{W}}(0)=\square_{\mathrm{W}_0}\geq 0\end{cases}\tag{4.31}$$

ดังนั้น คำตอบของ (4.31) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned}\square_{\mathrm{W}}(\xi)=\square_{\mathrm{W}_0}&+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{W}}(\xi))\\ &+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))ds\\ &+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\chi_{\mathrm{W}}(\xi)\\ &+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\chi_{\mathrm{W}}(s)ds\end{aligned}$$

ทำให้ได้

$$
\left| \square_{\mathrm{W}}(\xi) - \mathrm{G}_{\square_{\mathrm{W}}}(\xi) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))ds \right|
$$

$$
\leq \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\left|\chi_{\mathrm{W}}(\xi)\right| + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\left|\chi_{\mathrm{W}}(s)\right|ds
$$

$$
\leq \left(\frac{\beta^{*}\xi_{\min^{\beta^{*}-1}}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})} + \frac{\alpha^{*}\beta^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\alpha^{*}+\beta^{*}-1}\Gamma(\beta^{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})\Gamma(\alpha^{*}+\beta^{*})} \right)\kappa_{\mathrm{G_W}}
$$

ซึ่งเป็นสมการ (4.30) ดังต้องการ

$\square$

ทฤษฎีบท 4.6
ถ้า (A_3) และทฤษฎีบท 4.5 เป็นจริง แล้วแบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์

พิสูจน์ ให้ $\kappa_{\mathrm{G_W}} \in \square^{+}$ และ $\square_{\mathrm{W}}$ เป็นคำตอบของ (4.3)

สมมุติให้ $\mathrm{W} \in \mathrm{X}_3$ เป็นคำตอบเพียงหนึ่งเดียวของแบบจำลอง แล้วจะได้

$$
\begin{aligned}
&\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi) - \mathrm{W}(\xi)\right| \\
&\leq \Bigg| \square_{\mathrm{W}}(\xi) - \mathrm{W}_0 - \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi)) \\
&\quad - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))ds \Bigg|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi) - \mathrm{W}(\xi)\right| \\
&\leq \left| \square_{\mathrm{W}}(\xi) - \mathrm{G}_{\square_{\mathrm{W}}}(\xi) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))ds \right| \\
&\quad + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\left|\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{W}}(\xi)) - \mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi))\right| \\
&\quad + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\left|\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s)) - \mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))\right|ds \\
&\leq \left(\frac{\beta^{*}\xi_{\min}^{\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})} + \frac{\alpha^{*}\beta^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\alpha^{*}+\beta^{*}-1}\Gamma(\beta^{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})\Gamma(\alpha^{*}+\beta^{*})} \right)\left(\kappa_{\mathrm{G_W}} + \mathrm{L}_{\mathrm{G_W}}\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi) - \mathrm{W}(\xi)\right|\right)
\end{aligned}
$$

โดยการเลือกค่าคงที่

$$
\Phi_{\mathrm{G_W}} := \frac{\dfrac{\beta^{*}\xi_{\min}^{\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})} + \dfrac{\alpha^{*}\beta^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\alpha^{*}+\beta^{*}-1}\Gamma(\beta^{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})\Gamma(\alpha^{*}+\beta^{*})}}{1 - \left(\dfrac{\beta^{*}\xi_{\min}^{\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})} + \dfrac{\alpha^{*}\beta^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\alpha^{*}+\beta^{*}-1}\Gamma(\beta^{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})\Gamma(\alpha^{*}+\beta^{*})} \right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_W}}}
$$

ทำให้ได้ $\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{W}(\xi)\right| \le \Phi_{\mathrm{G_W}}\kappa_{\mathrm{G_W}}$ ดังนั้นแบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์

$\square$

บทแทรก 4.5
โดยการเลือกฟังก์ชัน $\mathrm{P_{G_W}}(\xi)=\Phi_{\mathrm{G_W}}\kappa_{\mathrm{G_W}}$ โดยที่ $\mathrm{P_{G_W}}(0)=0$ ในทฤษฎีบท 4.6 จะได้ว่า แบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์ทั่วไป

4.2 ทฤษฎีบทความมีเสถียรภาพของคำตอบประเภทอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียสของแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4), (3.11) และ (3.18)

ต่อไปจะให้เงื่อนไขที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทในหัวข้อนี้

(D_1) สำหรับ $\xi\in[0,\mathrm{T}^*]$ จะมีฟังก์ชันเพิ่ม $\mathrm{P_{G_U}}\in \mathrm{X}_1$ และ $\lambda_{\mathrm{G_U}}>0$ โดยที่

$$ {}^{\mathrm{FFP}}_{\;t}\mathrm{I}_0^{\alpha(t),\beta(t)}\mathrm{P_{G_U}}(\xi)\le\lambda_{\mathrm{G_U}}\mathrm{P_{G_U}}(\xi) \tag{4.31} $$

(D_2) สำหรับ $\xi\in[0,\mathrm{T}^*]$ จะมีฟังก์ชันเพิ่ม $\mathrm{P_{G_V}}\in \mathrm{X}_2$ และ $\lambda_{\mathrm{G_V}}>0$ โดยที่

$$ {}^{\mathrm{FFE}}_{\;t}\mathrm{I}_0^{\alpha(t),\beta(t)}\mathrm{P_{G_V}}(\xi)\le\lambda_{\mathrm{G_V}}\mathrm{P_{G_V}}(\xi) \tag{4.32} $$

(D_3) สำหรับ $\xi\in[0,\mathrm{T}^*]$ จะมีฟังก์ชันเพิ่ม $\mathrm{P_{G_W}}\in \mathrm{X}_3$ และ $\lambda_{\mathrm{G_W}}>0$ โดยที่

$$ {}^{\mathrm{FFM}}_{\;t}\mathrm{I}_0^{\alpha(t),\beta(t)}\mathrm{P_{G_W}}(\xi)\le\lambda_{\mathrm{G_W}}\mathrm{P_{G_W}}(\xi) \tag{4.33} $$

ทฤษฎีบท 4.7
ให้ $\square_{\mathrm{U}}\in \mathrm{X}_1$ เป็นคำตอบของ (4.7) แล้ว $$\left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{U}}}(\xi)\right|\le\kappa_{\mathrm{G_U}}\lambda_{\mathrm{G_U}}\mathrm{P_{G_U}}(\xi) \tag{4.34}$$ โดยที่ $\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{U}}}(\xi)$ ถูกกำหนดโดย (4.23)

พิสูจน์ ให้ $\square_{\mathrm{U}}$ เป็นคำตอบของ (4.7)

โดยเงื่อนไข (C_1) จากบทแทรก 4.2 จะได้

$$ \begin{cases} {}^{\mathrm{FFP}}_{\;\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\square_{\mathrm{U}}(\xi)=\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{U}}(\xi))+\psi_{\mathrm{U}}(\xi), \\ \square_{\mathrm{U}}(0)=\square_{\mathrm{U}_0}\ge 0 \end{cases} \tag{4.35} $$

ดังนั้นจะได้คำตอบของ (4.35) คือ

$$ \square_{\mathrm{U}}(\xi)=\square_{\mathrm{U}_0}+\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{U}}(s))ds $$
$$ +\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\psi_{\mathrm{U}}(s)ds $$

ทำให้ได้

$$ \left|\square_{\mathrm{U}}(\xi)-\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{U}}}(\xi)\right|\le\frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(s)-1}(\xi-s)^{\alpha(s)-1}\left|\psi_{\mathrm{U}}(s)\right|ds\le\kappa_{\mathrm{G_U}}\lambda_{\mathrm{G_U}}\mathrm{P_{G_U}}(\xi) $$

ซึ่งเป็นสมการ (4.34) ดังต้องการ

$\square$

ทฤษฎีบท 4.8
ถ้า (A_1), (D_1) และทฤษฎีบท 4.7 เป็นจริง แล้วแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส

พิสูจน์ ให้ $\kappa_{\mathrm{G_U}} \in \square^+$ และ $\square_{\mathrm{U}}$ เป็นคำตอบของ (4.7)

สมมุติให้ $\mathrm{U} \in \mathrm{X}_1$ เป็นคำตอบเพียงหนึ่งเดียวของแบบจำลอง และโดยเงื่อนไข (A_1), (D_1) และทฤษฎีบท 4.7 จะได้

$$\begin{aligned}
|\square_{\mathrm{U}}(\xi) - \mathrm{U}(\xi)| &\le \left| \square_{\mathrm{U}}(\xi) - \mathrm{U}_0 - \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))} \int_0^{\xi} s^{\beta(s)-1} (\xi - s)^{\alpha(s)-1} \mathrm{G}(s, \mathrm{U}(s)) ds \right| \\
&\le \left| \square_{\mathrm{U}}(\xi) - \square_{\mathrm{U}_0} - \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))} \int_0^{\xi} s^{\beta(s)-1} (\xi - s)^{\alpha(s)-1} \mathrm{G}(s, \square_{\mathrm{U}}(s)) ds \right| \\
&\quad + \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))} \int_0^{\xi} s^{\beta(s)-1} (\xi - s)^{\alpha(s)-1} |\mathrm{G}(s, \square_{\mathrm{U}}(s)) - \mathrm{G}(s, \mathrm{U}(s))| ds \\
&\le \kappa_{\mathrm{G_U}} \lambda_{\mathrm{G_U}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_U}}(\xi) + \frac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1} \Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^* + \beta^*)} \mathrm{L}_{\mathrm{G_U}} |\square_{\mathrm{U}}(\xi) - \mathrm{U}(\xi)|
\end{aligned}$$

โดยการเลือกค่าคงที่

$$\Omega_{\mathrm{G_U}} := \frac{\lambda_{\mathrm{G_U}}}{1 - \dfrac{\beta^*(\mathrm{T}^*)^{\alpha^*+\beta^*-1} \Gamma(\beta^*)}{\Gamma(\alpha^* + \beta^*)} \mathrm{L}_{\mathrm{G_U}}}$$

ทำให้ได้ $|\square_{\mathrm{U}}(\xi) - \mathrm{U}(\xi)| \le \Omega_{\mathrm{G_U}} \kappa_{\mathrm{G_U}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_U}}(\xi)$ ดังนั้นแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส

$\square$

บทแทรก 4.6
โดยการแทน $\kappa_{\mathrm{G_U}} = 1$ ใน $|\square_{\mathrm{U}}(\xi) - \mathrm{U}(\xi)| \le \Omega_{\mathrm{G_U}} \kappa_{\mathrm{G_U}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_U}}(\xi)$ ดังที่แสดงในทฤษฎีบท 4.8 จะได้ว่า แบบจำลอง VOFF-BEP (3.4) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียสทั่วไป

ทฤษฎีบท 4.9
ให้ $\square_{\mathrm{V}} \in \mathrm{X}_2$ เป็นคำตอบของ (4.8) แล้ว
$$\left| \square_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{G}_{\square_{\mathrm{V}}}(\xi) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))} \int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1} \mathrm{G}(s, \square_{\mathrm{V}}(s)) ds \right| \le \kappa_{\mathrm{G_V}} \lambda_{\mathrm{G_V}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_V}}(\xi) \qquad (4.36)$$
โดยที่ $\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{V}}}(\xi)$ ถูกกำหนดโดย (4.27)

พิสูจน์ ให้ $\square_{\mathrm{V}}$ เป็นคำตอบของ (4.8)

โดยเงื่อนไข (C_2) จากบทแทรก 4.2 จะได้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFE}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)} \Box_{\mathrm{V}}(\xi) = \mathrm{G}(\xi, \Box_{\mathrm{V}}(\xi)) + \psi_{\mathrm{V}}(\xi), \\ \Box_{\mathrm{V}}(0) = \Box_{\mathrm{V}_0} \geq 0 \end{cases} \tag{4.37}$$

ดังนั้นจะได้คำตอบของ (4.37) คือ

$$\Box_{\mathrm{V}}(\xi) = \Box_{\mathrm{V}_0} + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi, \Box_{\mathrm{V}}(\xi)) + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s, \Box_{\mathrm{V}}(s))ds$$
$$+ \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\psi_{\mathrm{V}}(\xi) + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\psi_{\mathrm{V}}(s)ds$$

ทำให้ได้

$$\left| \Box_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{G}_{\Box_{\mathrm{V}}}(\xi) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s, \Box_{\mathrm{V}}(s))ds \right|$$
$$\leq \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}|\psi_{\mathrm{V}}(\xi)| + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}|\psi_{\mathrm{V}}(s)|ds$$
$$\leq \kappa_{\mathrm{G_V}}\lambda_{\mathrm{G_V}}\mathrm{P}_{\mathrm{G_V}}(\xi)$$

ซึ่งเป็นสมการ (4.36) ดังต้องการ □

ทฤษฎีบท 4.10
ถ้า (A_2), (D_2) และทฤษฎีบท 4.9 เป็นจริง แล้วแบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส

พิสูจน์ ให้ $\kappa_{\mathrm{G_V}} \in \Box^+$ และ $\Box_{\mathrm{V}}$ เป็นคำตอบของ (4.8)

สมมุติให้ $\mathrm{V} \in \mathrm{X}_2$ เป็นคำตอบเพียงหนึ่งเดียวของแบบจำลอง และโดยเงื่อนไข (A_2), (D_2) และทฤษฎีบท 4.9 จะได้

$$|\Box_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{V}(\xi)|$$
$$\leq \left| \Box_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{V}_0 - \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi, \mathrm{V}(\xi)) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s, \mathrm{V}(s))ds \right|$$
$$\leq \left| \Box_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{G}_{\Box_{\mathrm{V}}}(\xi) - \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}\mathrm{G}(s, \Box_{\mathrm{V}}(s))ds \right|$$
$$+ \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}|\mathrm{G}(\xi, \Box_{\mathrm{V}}(\xi)) - \mathrm{G}(\xi, \mathrm{V}(\xi))|$$
$$+ \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}|\mathrm{G}(s, \Box_{\mathrm{V}}(s)) - \mathrm{G}(s, \mathrm{V}(s))|ds$$
$$\leq \kappa_{\mathrm{G_V}}\lambda_{\mathrm{G_V}}\mathrm{P}_{\mathrm{G_V}}(\xi) + \left(\frac{\beta^*\xi_{\min^{\beta^*-1}}(1-\alpha_*)}{\mathrm{M}(\alpha^*)} + \frac{\alpha^*(\mathrm{T}^*)^{\beta^*}}{\mathrm{M}(\alpha^*)} \right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_V}}|\Box_{\mathrm{V}}(\xi) - \mathrm{V}(\xi)|$$

โดยการเลือกค่าคงที่

$$\Omega_{G_V} := \frac{\lambda_{G_V}}{1-\left(\dfrac{\beta^{*}\xi_{\min}^{\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{M(\alpha^{*})}+\dfrac{\alpha^{*}(T^{*})^{\beta^{*}}}{M(\alpha^{*})}\right)L_{G_V}}$$

ทำให้ได้ $\left|\square_V(\xi)-V(\xi)\right| \le \Omega_{G_V}\kappa_{G_V}P_{G_V}(\xi)$ ดังนั้นแบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส

$\square$

บทแทรก 4.7

โดยการแทน $\kappa_{G_V}=1$ ใน $\left|\square_V(\xi)-V(\xi)\right| \le \Omega_{G_V}\kappa_{G_V}P_{G_V}(\xi)$ ดังที่แสดงในทฤษฎีบท 4.10 จะได้ว่า แบบจำลอง VOFF-BEP (3.11) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียสทั่วไป

ทฤษฎีบท 4.11

ให้ $\square_W \in X_3$ เป็นคำตอบของ (4.9) แล้ว

$$\left|\square_W(\xi)-G_{\square_W}(\xi)\right| \le \kappa_{G_W}\lambda_{G_W}P_{G_W}(\xi) \tag{4.38}$$

โดยที่ $G_{\square_W}(\xi)$ ถูกกำหนดโดย (4.30)

พิสูจน์ ให้ $\square_W$ เป็นคำตอบของ (4.9)

โดยเงื่อนไข (C_3) จากบทแทรก 4.2 จะได้

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{FFM}}_{\xi}\mathcal{D}_0^{\alpha(\xi),\beta(\xi)}\square_W(\xi)=G(\xi,\square_W(\xi))+\psi_W(\xi), \\ \square_W(0)=\square_{W_0}\ge 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

ดังนั้นจะได้คำตอบของ (4.39) คือ

$$\begin{aligned}\square_W(\xi)=\square_{W_0}&+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{AB(\alpha(\xi))}G(\xi,\square_W(\xi)).\\ &+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{AB(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}G(s,\square_W(s))ds\\ &+\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{AB(\alpha(\xi))}\psi_W(\xi)\\ &+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{AB(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\psi_W(s)ds\end{aligned}$$

ทำให้ได้

$$
\begin{aligned}
&\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{W}}}(\xi)-\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))ds\right| \\
&\leq \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\left|\psi_{\mathrm{W}}(\xi)\right|+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\left|\psi_{\mathrm{W}}(s)\right|ds \\
&\leq \kappa_{\mathrm{G_W}}\lambda_{\mathrm{G_W}}\mathrm{P}_{\mathrm{G_W}}(\xi)
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นสมการ (4.38) ดังต้องการ

$\square$

ทฤษฎีบท 4.12
ถ้า (A_3), (D_3) และทฤษฎีบท 4.11 เป็นจริง แล้วแบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส

พิสูจน์ ให้ $\kappa_{\mathrm{G_W}} \in \square^{+}$ และ $\square_{\mathrm{W}}$ เป็นคำตอบของ (4.9)

สมมุติให้ $\mathrm{W} \in \mathrm{X}_3$ เป็นคำตอบเพียงหนึ่งเดียวของแบบจำลอง และโดยเงื่อนไข (A_3), (D_3) และทฤษฎีบท 4.11 จะได้

$$
\begin{aligned}
&\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{W}(\xi)\right| \\
&\leq \Bigg|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\square_{\mathrm{W}_0}-\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{W}}(\xi)) \\
&\quad -\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))ds\Bigg| \\
&\leq \left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{G}_{\square_{\mathrm{W}}}(\xi)-\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))ds\right| \\
&\quad +\frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\left|\mathrm{G}(\xi,\square_{\mathrm{W}}(\xi))-\mathrm{G}(\xi,\mathrm{W}(\xi))\right| \\
&\quad +\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi}s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\left|\mathrm{G}(s,\square_{\mathrm{W}}(s))-\mathrm{G}(s,\mathrm{W}(s))\right|ds \\
&\leq \kappa_{\mathrm{G_W}}\lambda_{\mathrm{G_W}}\mathrm{P}_{\mathrm{G_W}}(\xi)+\left(\frac{\beta^{*}\xi_{\min^{\beta^{*}-1}}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})}+\frac{\alpha^{*}\beta^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\alpha^{*}+\beta^{*}-1}\Gamma(\beta^{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})\Gamma(\alpha^{*}+\beta^{*})}\right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_W}}\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{W}(\xi)\right|
\end{aligned}
$$

โดยการเลือกค่าคงที่

$$
\Omega_{\mathrm{G_W}} := \frac{\lambda_{\mathrm{G_W}}}{1-\left(\frac{\beta^{*}\xi_{\min}^{\beta^{*}-1}(1-\alpha_{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})}+\frac{\alpha^{*}\beta^{*}(\mathrm{T}^{*})^{\alpha^{*}+\beta^{*}-1}\Gamma(\beta^{*})}{\mathrm{AB}(\alpha^{*})\Gamma(\alpha^{*}+\beta^{*})}\right)\mathrm{L}_{\mathrm{G_W}}}
$$

ทำให้ได้ $\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{W}(\xi)\right| \le \Omega_{\mathrm{G_W}} \kappa_{\mathrm{G_W}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_W}}(\xi)$ ดังนั้นแบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียส

$\square$

บทแทรก 4.8
โดยการแทน $\kappa_{\mathrm{G_W}} = 1$ ใน $\left|\square_{\mathrm{W}}(\xi)-\mathrm{W}(\xi)\right| \le \Omega_{\mathrm{G_W}} \kappa_{\mathrm{G_W}} \mathrm{P}_{\mathrm{G_W}}(\xi)$ ดังที่แสดงในทฤษฎีบท 4.12 จะได้ว่า แบบจำลอง VOFF-BEP (3.18) จะมีความเสถียรภาพแบบอูแลม-ไฮเออร์-รัซเซียสทั่วไป

4.3 คำตอบเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เศษส่วน VOFF-BEP (3.4), (3.11) และ (3.18)

ในหัวข้อนี้ เราได้ใช้วิธีลากรานจ์แบบแยกส่วน (Lagrangian piece-wise interpolation) ในการหาคำตอบเชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลอง VOFF-BEP (3.4), (3.11) และ (3.18)

4.3.1 แบบจำลอง VOFF-BEP ภายใต้เคอร์แนลเป็นกฎยกกำลัง

ใช้ตัวดำเนินการปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน (2.7) ในสมการ (3.7) ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\mathrm{S}^*(\xi) = \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)ds, \tag{4.40}$$

$$\mathrm{B}^*(\xi) = \mathrm{B}_0^* + \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}_2(s,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)ds, \tag{4.41}$$

$$\mathrm{E}^*(\xi) = \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi)}{\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}_3(s,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)ds, \tag{4.42}$$

โดยที่ $\mathrm{G}_i(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)$ ถูกกำหนดโดยสมการ (3.1) - (3.3) ตามลำดับ และจะได้สูตรการประมาณค่าเชิงตัวเลข ที่ $\xi = \xi_{n+1}$ ดังนี้

$$\mathrm{S}_{n+1}^* = \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))}\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}(\xi_{n+1}-s)^{\alpha(\xi_{n+1})-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*)ds, \tag{4.43}$$

$$\mathrm{B}_{n+1}^* = \mathrm{B}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))}\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}(\xi_{n+1}-s)^{\alpha(\xi_{n+1})-1}\mathrm{G}_2(s,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*)ds, \tag{4.44}$$

$$\mathrm{E}_{n+1}^* = \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))}\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}(\xi_{n+1}-s)^{\alpha(\xi_{n+1})-1}\mathrm{G}_3(s,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*)ds. \tag{4.45}$$

ดังนั้นจะได้ รูปแบบการประมาณค่าเชิงตัวเลข คือ

$$\mathrm{S}_{n+1}^* = \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{j+1})-1}(\xi_{j+1}-s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}_j^*,\mathrm{B}_j^*,\mathrm{E}_j^*)ds, \tag{4.46}$$

$$\mathrm{B}_{n+1}^* = \mathrm{B}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{j+1})-1}(\xi_{j+1}-s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1}\mathrm{G}_2(s,\mathrm{S}_j^*,\mathrm{B}_j^*,\mathrm{E}_j^*)ds, \tag{4.47}$$

$$\mathrm{E}_{n+1}^* = \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{j+1})-1}(\xi_{j+1}-s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1}\mathrm{G}_3(s,\mathrm{S}_j^*,\mathrm{B}_j^*,\mathrm{E}_j^*)ds. \tag{4.48}$$

เราใช้วิธีลากรานจ์แบบแยกส่วนในช่วง $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ ในการประมาณค่าเคอร์แนลข้างในอินทิกรัล ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{P}_j^{\mathrm{S}}(s) = \frac{s-\xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \xi_j^{\beta(\xi_j)-1} \mathrm{G}_1(s, \mathrm{S}_j^*, \mathrm{B}_j^*, \mathrm{E}_j^*) - \frac{s-\xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1} \mathrm{G}_1(s, \mathrm{S}_{j-1}^*, \mathrm{B}_{j-1}^*, \mathrm{E}_{j-1}^*), \quad (4.49)$$

$$\mathrm{P}_j^{\mathrm{B}}(s) = \frac{s-\xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \xi_j^{\beta(\xi_j)-1} \mathrm{G}_2(s, \mathrm{S}_j^*, \mathrm{B}_j^*, \mathrm{E}_j^*) - \frac{s-\xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1} \mathrm{G}_2(s, \mathrm{S}_{j-1}^*, \mathrm{B}_{j-1}^*, \mathrm{E}_{j-1}^*), \quad (4.50)$$

$$\mathrm{P}_j^{\mathrm{E}}(s) = \frac{s-\xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \xi_j^{\beta(\xi_j)-1} \mathrm{G}_3(s, \mathrm{S}_j^*, \mathrm{B}_j^*, \mathrm{E}_j^*) - \frac{s-\xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1} \mathrm{G}_3(s, \mathrm{S}_{j-1}^*, \mathrm{B}_{j-1}^*, \mathrm{E}_{j-1}^*). \quad (4.51)$$

แทนสมการ (4.49) - (4.51) ในสมการ (4.46) - (4.48) จะได้

$$\mathrm{S}_{n+1}^* = \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))} \sum_{j=1}^{n} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} (\xi_{j+1} - s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1} \mathrm{P}_j^{\mathrm{S}}(s) ds, \quad (4.52)$$

$$\mathrm{B}_{n+1}^* = \mathrm{B}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))} \sum_{j=1}^{n} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} (\xi_{j+1} - s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1} \mathrm{P}_j^{\mathrm{B}}(s), \quad (4.53)$$

$$\mathrm{E}_{n+1}^* = \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)}{\Gamma(\alpha(\xi_n))} \sum_{j=1}^{n} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} (\xi_{j+1} - s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1} \mathrm{P}_j^{\mathrm{E}}(s). \quad (4.54)$$

รูปแบบเชิงตัวเลขต่อไปนี้ทำได้โดยการคำนวณด้านขวาของตัวปริพันธ์ (4.52) - (4.54) เราได้สูตรต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_{n+1}^* = \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)(\Delta\xi)^{\alpha(\xi_n)}}{\Gamma(\alpha(\xi_n)+2)} \sum_{j=1}^{n} \Big[& \xi_j^{\beta(\xi_j)-1} \mathrm{G}_1(\xi_j, \mathrm{S}_j^*, \mathrm{B}_j^*, \mathrm{E}_j^*) \Theta_1(n,j) \\ & - \xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1} \mathrm{G}_1(\xi_{j-1}, \mathrm{S}_{j-1}^*, \mathrm{B}_{j-1}^*, \mathrm{E}_{j-1}^*) \Theta_2(n,j) \Big], \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{n+1}^* = \mathrm{B}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)(\Delta\xi)^{\alpha(\xi_n)}}{\Gamma(\alpha(\xi_n)+2)} \sum_{j=1}^{n} \Big[& \xi_j^{\beta(\xi_j)-1} \mathrm{G}_2(\xi_j, \mathrm{S}_j^*, \mathrm{B}_j^*, \mathrm{E}_j^*) \Theta_1(n,j) \\ & - \xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1} \mathrm{G}_2(\xi_{j-1}, \mathrm{S}_{j-1}^*, \mathrm{B}_{j-1}^*, \mathrm{E}_{j-1}^*) \Theta_2(n,j) \Big], \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{n+1}^* = \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)(\Delta\xi)^{\alpha(\xi_n)}}{\Gamma(\alpha(\xi_n)+2)} \sum_{j=1}^{n} \Big[& \xi_j^{\beta(\xi_j)-1} \mathrm{G}_3(\xi_j, \mathrm{S}_j^*, \mathrm{B}_j^*, \mathrm{E}_j^*) \Theta_1(n,j) \\ & - \xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1} \mathrm{G}_3(\xi_{j-1}, \mathrm{S}_{j-1}^*, \mathrm{B}_{j-1}^*, \mathrm{E}_{j-1}^*) \Theta_2(n,j) \Big], \end{aligned} \quad (4.57)$$

โดยที่

$$\Theta_1(n,j) = (n+1-j)^{\alpha(\xi_j)}(n-j+2+\alpha(\xi_j)) - (n-j)^{\alpha(\xi_j)}(n-j+2+2\alpha(\xi_j)), \quad (4.58)$$

$$\Theta_2(n,j) = (n+1-j)^{\alpha(\xi_{j-1})+1} - (n-j)^{\alpha(\xi_{j-1})}(n-j+1+\alpha(\xi_{j-1})). \quad (4.59)$$

4.3.2 แบบจำลอง VOFF-BEP ภายใต้เคอร์แนลเป็นเลขชี้กำลังแบบถดถอย

ใช้ตัวดำเนินการปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน (2.8) ในสมการ (3.14) ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$
\begin{aligned}
S^*(\xi) = S_0^* &+ \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}G_1(\xi, S^*, B^*, E^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}G_1(s, S^*, B^*, E^*)ds,
\end{aligned} \tag{4.60}
$$

$$
\begin{aligned}
B^*(\xi) = B_0^* &+ \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}G_2(\xi, S^*, B^*, E^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}G_2(s, S^*, B^*, E^*)ds,
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

$$
\begin{aligned}
E^*(\xi) = E_0^* &+ \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{M(\alpha(\xi))}G_3(\xi, S^*, B^*, E^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{M(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}G_3(s, S^*, B^*, E^*)ds,
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

โดยที่ $G_i(\xi, S^*, B^*, E^*)$ ถูกกำหนดโดยสมการ (3.1) - (3.3) ตามลำดับ และจะได้สูตรการประมาณค่าเชิงตัวเลข ที่ $\xi = \xi_{n+1}$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
S_{n+1}^* = S_0^* &+ \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{M(\alpha(\xi_n))}G_1(\xi_n, S_n^*, B_n^*, E_n^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{M(\alpha(\xi_n))}\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}G_1(s, S_n^*, B_n^*, E_n^*)ds,
\end{aligned} \tag{4.63}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{n+1}^* = B_0^* &+ \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{M(\alpha(\xi_n))}G_2(\xi_n, S_n^*, B_n^*, E_n^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{M(\alpha(\xi_n))}\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}G_2(s, S_n^*, B_n^*, E_n^*)ds,
\end{aligned} \tag{4.64}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{n+1}^* = E_0^* &+ \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{M(\alpha(\xi_n))}G_3(\xi_n, S_n^*, B_n^*, E_n^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{M(\alpha(\xi_n))}\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}G_3(s, S_n^*, B_n^*, E_n^*)ds.
\end{aligned} \tag{4.65}
$$

ดังนั้นจะได้ รูปแบบการประมาณค่าเชิงตัวเลข คือ

$$
\begin{aligned}
S_{n+1}^* = S_0^* &+ \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{M(\alpha(\xi_n))}G_1(\xi_n, S_n^*, B_n^*, E_n^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{M(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}G_1(s, S_n^*, B_n^*, E_n^*)ds,
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{n+1}^* = B_0^* &+ \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{M(\alpha(\xi_n))}G_2(\xi_n, S_n^*, B_n^*, E_n^*) \\
&+ \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{M(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}G_2(s, S_n^*, B_n^*, E_n^*)ds,
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^*_{n+1} &= \mathrm{E}^*_0 + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_3(\xi_n,\mathrm{S}^*_n,\mathrm{B}^*_n,\mathrm{E}^*_n)\\ &\quad+\frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{\mathrm{M}(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}\mathrm{G}_3(s,\mathrm{S}^*_n,\mathrm{B}^*_n,\mathrm{E}^*_n)ds.\end{aligned} \tag{4.68}$$

เราใช้วิธีลากรานจ์แบบแยกส่วน จะได้รูปแบบเชิงตัวเลข ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^*_{n+1} &= \mathrm{S}^*_0 + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_1(\xi_n,\mathrm{S}^*_n,\mathrm{B}^*_n,\mathrm{E}^*_n)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\Big[\Xi_1(j)\mathrm{G}_1(\xi_j,\mathrm{S}^*_j,\mathrm{B}^*_j,\mathrm{E}^*_j)-\Xi_2(j)\mathrm{G}_1(\xi_{j-1},\mathrm{S}^*_{j-1},\mathrm{B}^*_{j-1},\mathrm{E}^*_{j-1})\Big],\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^*_{n+1} &= \mathrm{B}^*_0 + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_2(\xi_n,\mathrm{S}^*_n,\mathrm{B}^*_n,\mathrm{E}^*_n)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\Big[\Xi_1(j)\mathrm{G}_2(\xi_j,\mathrm{S}^*_j,\mathrm{B}^*_j,\mathrm{E}^*_j)-\Xi_2(j)\mathrm{G}_2(\xi_{j-1},\mathrm{S}^*_{j-1},\mathrm{B}^*_{j-1},\mathrm{E}^*_{j-1})\Big],\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^*_{n+1} &= \mathrm{E}^*_0 + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{M}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_3(\xi_n,\mathrm{S}^*_n,\mathrm{B}^*_n,\mathrm{E}^*_n)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\Big[\Xi_1(j)\mathrm{G}_3(\xi_j,\mathrm{S}^*_j,\mathrm{B}^*_j,\mathrm{E}^*_j)-\Xi_2(j)\mathrm{G}_3(\xi_{j-1},\mathrm{S}^*_{j-1},\mathrm{B}^*_{j-1},\mathrm{E}^*_{j-1})\Big],\end{aligned} \tag{4.71}$$

โดยที่

$$\Xi_1(j)=\frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)\Big\{\xi_{j+1}^{\beta(\xi_{n+1})}\Big[2(\Delta\xi)\beta(\xi_{n+1})-\xi_{j-1}\Big]-\xi_j^{\beta(\xi_{n+1})}\Big[(\Delta\xi)\beta(\xi_{n+1})-\xi_{j-1}\Big]\Big\}}{\beta(\xi_{n+1})(\beta(\xi_{n+1}+1))(\Delta\xi)\mathrm{M}(\alpha(\xi_n))},$$

$$\Xi_2(j)=\frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)\Big\{\xi_{j+1}^{\beta(\xi_{n+1})}\Big[(\Delta\xi)\beta(\xi_{n+1})-\xi_j\Big]+\xi_j^{\beta(\xi_{n+1})+1}\Big\}}{\beta(\xi_{n+1})(\beta(\xi_{n+1}+1))(\Delta\xi)\mathrm{M}(\alpha(\xi_n))}.$$

4.3.3 แบบจำลอง VOFF-BEP ภายใต้เคอร์แนลฟังก์ชันมิตแทก-เลฟเฟลอร์

ใช้ตัวดำเนินการปริพันธ์แฟร็กทัล-เศษส่วน (2.9) ในสมการ (3.21) ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{aligned}\mathrm{S}^*(\xi) &= \mathrm{S}^*_0 + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}_1(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\\ &\quad+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)ds,\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}^*(\xi) &= \mathrm{B}^*_0 + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}_2(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)\\ &\quad+\frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}_2(s,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)ds,\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^*(\xi) &= \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi)\xi^{\beta(\xi)-1}(1-\alpha(\xi))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))}\mathrm{G}_3(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*) \\ &\quad + \frac{\alpha(\xi)\beta(\xi)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi))\Gamma(\alpha(\xi))}\int_0^{\xi} s^{\beta(\xi)-1}(\xi-s)^{\alpha(\xi)-1}\mathrm{G}_3(s,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)ds,\end{aligned} \tag{4.74}$$

โดยที่ $\mathrm{G}_i(\xi,\mathrm{S}^*,\mathrm{B}^*,\mathrm{E}^*)$ ถูกกำหนดโดยสมการ ( ) - ( ) ตามลำดับ และจะได้สูตรการประมาณค่าเชิงตัวเลข ที่ $\xi=\xi_{n+1}$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{n+1}^* &= \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_1(\xi_n,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*) + \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n))} \\ &\quad \times\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}(\xi_{n+1}-s)^{\alpha(\xi_{n+1})-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*)ds,\end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{n+1}^* &= \mathrm{B}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_2(\xi_n,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*) + \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n))} \\ &\quad \times\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}(\xi_{n+1}-s)^{\alpha(\xi_{n+1})-1}\mathrm{G}_2(s,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*)ds,\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{n+1}^* &= \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_3(\xi_n,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*) + \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n))} \\ &\quad \times\int_0^{\xi_{n+1}} s^{\beta(\xi_{n+1})-1}(\xi_{n+1}-s)^{\alpha(\xi_{n+1})-1}\mathrm{G}_3(s,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*)ds.\end{aligned} \tag{4.77}$$

ดังนั้นจะได้ รูปแบบการประมาณค่าเชิงตัวเลข คือ

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{n+1}^* &= \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_1(\xi_n,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*) \\ &\quad + \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{j+1})-1}(\xi_{j+1}-s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}_j^*,\mathrm{B}_j^*,\mathrm{E}_j^*)ds,\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{n+1}^* &= \mathrm{B}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_2(\xi_n,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*) \\ &\quad + \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{j+1})-1}(\xi_{j+1}-s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1}\mathrm{G}_2(s,\mathrm{S}_j^*,\mathrm{B}_j^*,\mathrm{E}_j^*)ds,\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{n+1}^* &= \mathrm{E}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_3(\xi_n,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*) \\ &\quad + \frac{\alpha(\xi_n)\beta(\xi_n)}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n))}\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s^{\beta(\xi_{j+1})-1}(\xi_{j+1}-s)^{\alpha(\xi_{j+1})-1}\mathrm{G}_3(s,\mathrm{S}_j^*,\mathrm{B}_j^*,\mathrm{E}_j^*)ds.\end{aligned} \tag{4.80}$$

เราใช้วิธีลากรานจ์แบบแยกส่วน จะได้รูปแบบเชิงตัวเลข ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{n+1}^* &= \mathrm{S}_0^* + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_1(\xi_n,\mathrm{S}_n^*,\mathrm{B}_n^*,\mathrm{E}_n^*) \\ &\quad + \frac{\beta(\xi_n)(\Delta\xi)^{\alpha(\xi_n)}}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n)+2)}\sum_{j=1}^{n}\Big[\xi_j^{\beta(\xi_j)-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}_j^*,\mathrm{B}_j^*,\mathrm{E}_j^*)\Theta_1(n,j) \\ &\quad -\xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1}\mathrm{G}_1(s,\mathrm{S}_{j-1}^*,\mathrm{B}_{j-1}^*,\mathrm{E}_{j-1}^*)\Theta_2(n,j)\Big],\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\mathrm{B}^*_{n+1} = \mathrm{B}^*_0 + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_2(\xi_n, \mathrm{S}^*_n, \mathrm{B}^*_n, \mathrm{E}^*_n)$$
$$+\frac{\beta(\xi_n)(\Delta\xi)^{\alpha(\xi_n)}}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n)+2)}\sum_{j=1}^{n}\Big[\xi_j^{\beta(\xi_j)-1}\mathrm{G}_2(s, \mathrm{S}^*_j, \mathrm{B}^*_j, \mathrm{E}^*_j)\Theta_1(n, j) \qquad (4.82)$$
$$-\xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1}\mathrm{G}_2(s, \mathrm{S}^*_{j-1}, \mathrm{B}^*_{j-1}, \mathrm{E}^*_{j-1})\Theta_2(n, j)\Big],$$
$$\mathrm{E}^*_{n+1} = \mathrm{E}^*_0 + \frac{\beta(\xi_n)\xi_n^{\beta(\xi_n)-1}(1-\alpha(\xi_n))}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))}\mathrm{G}_3(\xi_n, \mathrm{S}^*_n, \mathrm{B}^*_n, \mathrm{E}^*_n)$$
$$+\frac{\beta(\xi_n)(\Delta\xi)^{\alpha(\xi_n)}}{\mathrm{AB}(\alpha(\xi_n))\Gamma(\alpha(\xi_n)+2)}\sum_{j=1}^{n}\Big[\xi_j^{\beta(\xi_j)-1}\mathrm{G}_3(s, \mathrm{S}^*_j, \mathrm{B}^*_j, \mathrm{E}^*_j)\Theta_1(n, j) \qquad (4.83)$$
$$-\xi_{j-1}^{\beta(\xi_{j-1})-1}\mathrm{G}_3(s, \mathrm{S}^*_{j-1}, \mathrm{B}^*_{j-1}, \mathrm{E}^*_{j-1})\Theta_2(n, j)\Big],$$

โดยที่ $\Theta_i(n, j), (i=1,2)$ ถูกกำหนดโดย (4.58) - (4.59) ตามลำดับ