บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนิยามและบทตั้ง

บทนิยาม 2.1 ให้ $\mathcal{D}$ เป็นเซตย่อยไม่ว่างของ H ลำดับ $\{v_i\} \in H$ จะกล่าวว่าเป็น ควอไซ-เฟเช และลู่เข้าสู่ $\mathcal{D}$ ก็ต่อเมื่อ ทุก $v \in \mathcal{D}$ มีลำดับบวก $\{\varepsilon_i\}$ ซึ่ง $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$ และ $\|v_{i+1} - v\|^2 \leq \|v_i - v\|^2 + \varepsilon_i$ สำหรับทุก $i \geq 1$ ถ้า $\{\varepsilon_i\}$ ไม่เป็นลำดับว่าง จะกล่าวว่า $\{v_i\}$ เป็น ลำดับเฟเชลู่เข้าสู่ $\mathcal{D}$

บทตั้ง 2.1 Oyewole, Abass & Mewomo (2020 : 389-408) ให้ $\alpha \in (0,1)$ สำหรับ $v, y \in H$ จะมีสมบัติต่อไปนี้:

1. $|\langle v, y \rangle| \leq \|v\| \|y\|$
2. $\|v + y\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\langle y, v + y \rangle$
3. $\|v + y\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, y \rangle + \|y\|^2$
4. $\|\alpha v + (1 - \alpha) y\|^2 = \alpha \|v\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2 - \alpha(1 - \alpha)\|v - y\|^2$

บทตั้ง 2.2 Gibali, Reich & Zalas (2017 : 417-437) ให้ $\mathcal{D}$ เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ที่ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H สำหรับทุก $v \in H$ และ $y \in \mathcal{D}$ แล้ว

$$y = \mathcal{P}_{\mathcal{D}} v \Leftrightarrow \langle v - y, y - z \rangle \geq 0 \text{ สำหรับทุก } z \in \mathcal{D}$$

บทตั้ง 2.3 Kopeck & Reich (2012 : 41-47) ให้ $\mathcal{D}$ เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ที่ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H สำหรับทุก $v \in H$ แล้ว

1. $\|\mathcal{P}_{\mathcal{D}} v - \mathcal{P}_{\mathcal{D}} y\|^2 \leq \langle v - y, \mathcal{P}_{\mathcal{D}} v - \mathcal{P}_{\mathcal{D}} y \rangle$ สำหรับทุก $y \in \mathcal{D}$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

2. $\|x - \mathcal{P}_{\mathcal{D}} v\|^2 + \|y - \mathcal{P}_{\mathcal{D}} x\|^2 \leq \|v - y\|^2$ สำหรับทุก $y \in \mathcal{D}$

บทตั้ง 2.4 Xu (2002 : 240-256) ให้ $\{a_i\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงไม่ลบและมี $i_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$a_{i+1} = (1 - \alpha_i) a_i + \alpha_i b_i + c_i \text{ สำหรับทุก } i \geq i_0$$

เมื่อ $\{a_i\} \subset (0,1)$ และ $\{b_i\}$, $\{c_i\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty, \quad \limsup_{i \to \infty} b_i \leq 0$

2. $c_i \geq 0$ สำหรับทุก $i \geq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty$

แล้ว

$$\lim_{i\to\infty} a_i = 0$$

บทตั้ง 2.5 Hanjing & Suantai (2020 : 378) ให้ $\{a_i\}$ เป็นลำดับจำนวนจริงบวก ซึ่ง

$$a_{i+1} \leq (1+\alpha_i)a_i + \alpha_i a_{i-1}, \text{ สำหรับทุก } i \geq 1$$

แล้ว $a_{i+1} \leq K \cdot \prod_{n=1}^{i}(1+2\alpha_n)$ เมื่อ $K = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ มากกว่านั้น ถ้า $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$ แล้ว $\{\alpha_i\}$ มีขอบเขต

บทตั้ง 2.6 Iusem, Svaiter & Teboulle (1994 : 790-814) ถ้า $\{v_i\}$ เป็นลำดับเฟเชลู่เข้าสู่ $\mathcal{D}$ แล้ว

1. $\{v_i\}$ มีขอบเขต
2. ถ้าทุกจุดสะสมแบบอ่อนของ $\{v_i\}$ ใน $\mathcal{D}$ แล้ว $\{v_i\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดใน $\mathcal{D}$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Tseng (2000 : 431-446) ได้นำเสนอวิธีการไปข้างหน้า-ย้อนกลับแบบปรับปรุงโดยใช้ขนาดขั้นตอนด้วยเทคนิคการค้นหาเส้นดังนี้

ให้ $\sigma > 0, \delta \in (0,1)$ และ $v_1 \in H$ คำนวณดังนี้

$$\begin{aligned} z_i &= \operatorname{prox}_{\rho_i h}(v_i - \rho_i \nabla g(v_i)) \\ v_{i+1} &= \operatorname{prox}_{\rho_i h}(z_i - \rho_i(\nabla g(z_i) - \nabla g(v_i))), \quad \forall\, i \geq 1 \end{aligned}$$

เมื่อ ρ_i เป็นจำนวนที่มากที่สุดที่ $\rho \in \{\sigma, \sigma\delta, \sigma\delta^2, \dots\}$ สอดคล้องกับ

$$\rho\|\nabla g(z_i) - \nabla g(v_i)\| \leq \|z_i - v_i\|$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ / BURIRAM RAJABHAT UNIVERSITY

Shehu, Cai & Iyiola (2015 : 123) ได้นำเสนอวิธีการใกล้เคียงแยกแบบปรับปรุง ให้ $r : H \longrightarrow H$ เป็นการส่งแบบหดด้วย $\alpha \in (0,1)$ และ $\phi(v) = \sqrt{\nabla A(v)\|^2 + \|B(v)\|^2}$ ซึ่ง $A(v) = \dfrac{1}{2}(I - \operatorname{prox}_{\rho h})Kv\|^2$ และ $B(v) = \dfrac{1}{2}(I - \operatorname{prox}_{\rho\mu_i g})v\|^2$ จุดเริ่มต้น $v_1 \in H$ และคำนวณดังนี้

$$\begin{aligned} z_i &= v_i - \mu_i K^*(I - \operatorname{prox}_{\rho h})Kv_i, \\ v_{i+1} &= \alpha_i r(v_i) + (1-\alpha_i)\operatorname{prox}_{\rho\mu_i g} z_i, \quad \forall\, i \geq 1 \end{aligned}$$

เมื่อขนาดขั้นตอน $\mu_i = \psi_i \dfrac{A(v_i) + B(v_i)}{\phi^2(v_i)}$ ด้วย $0 < \psi_i < 4$

Bello-Cruz & Nghia (2016 : 1209-1238) ได้นำเสนอวิธีการไปข้างหน้า-ย้อนกลับแบบหลายขั้นตอนโดยใช้ขนาดขั้นตอนด้วยเทคนิคการค้นหาเส้นดังนี้

ให้ $\sigma > 0, \mu \in (0, \frac{1}{2}), \lambda \in (0,1)$ และ $t_0 = 1$ เลือก $v_0, v_1 \in H$ และคำนวณดังนี้

$$\begin{aligned}
t_{i+1} &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{i-1}^2}}{2}\\
\gamma_i &= \frac{t_{i-1} - 1}{t_i}\\
z_i &= v_i + \gamma_i(v_i - v_{i-1})\\
v_{i+1} &= \operatorname{prox}_{\rho_i h}(z_i - \rho_i \nabla g(z_i)), \quad \forall\, i \geq 1
\end{aligned}$$

เมื่อ $\rho_i = \sigma\lambda^{m_n}$ และ m_n จำนวนที่ไม่เป็นลบน้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ

$$\rho_i \|\nabla g(\operatorname{prox}_{\rho_i h}(z_i - \rho_i \nabla g(z_i)) - \nabla g(z_i))\| \leq \mu \| \operatorname{prox}_{\rho_i h}(z_i - \rho_i g(z_i)) - z_i\|$$

Malitsky & Tam (2020 : 383-390) ได้นำเสนอวิธีการไปข้างหน้า-สะท้อน-ย้อนกลับดังนี้

ให้ $\rho_0 > 0, \delta \in (0,1), \alpha \in \{1, \beta - 1\}$ และ $\beta \in (0,1)$ และคำนวณดังนี้

$$v_{i+1} = \operatorname{prox}_{\rho_i h}(v_i - \rho_i \nabla g(v_i) - \rho_0 i - 1(\nabla g(v_i) - \nabla g(v_{i-1}))), \quad i \geq 1 \tag{2.1}$$

เมื่อ $\rho_i = \gamma\rho_{i-1}\beta^n$ ซึ่ง n จำนวนที่ไม่เป็นลบน้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ

$$\rho_i \|\nabla g(v_{i+1}) - \nabla g(v_i)\| \leq \frac{\delta}{2}\|v_{i+1} - v_i\|$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี