

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการวิจัย

ในบทนี้จะนำเสนอวิธีเกรเดียนต์ใกล้เคียงด้วยขั้นตอนเฉื่อยสลับกันสำหรับปัญหาในการหาค่าน้อยสุด และแสดงการพิสูจน์เพื่อยืนยันกระบวนการที่ได้มีเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์หมีดังนี้

(1) เซตคำตอบของปัญหาการหาค่าน้อยสุดแบบคอนเวกซ์ (1.3) เป็นเซตไม่ว่าง นั่นคือ

$$\Omega = \arg \min(g + h) \neq \emptyset$$

(2) $h : H \rightarrow (-\infty, \infty]$ เป็นสองฟังก์ชันแท้ กึ่งต่อเนื่องล่าง และคอนเวกซ์

(3) $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่หาอนุพันธ์ได้บน H และ ∇ เป็นลิฟทิฟต์ต่อเนื่องบน H ด้วยค่าลิฟทิฟต์ $L > 0$

วิธีเกรเดียนต์ใกล้เคียงด้วยขั้นตอนเฉื่อยสลับกัน

ให้ $\gamma \in (0, 1)$, $\alpha_1 > 0$, $\rho_1 > 0$, $\delta > 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$ และ $v_0, v_1 \in H$

ขั้นที่ 1 คำนวณ

$$z_i = \begin{cases} v_i, & \text{ถ้าเป็นจำนวนคู่} \\ v_i + \gamma(v_i - v_{i-1}), & \text{ถ้าเป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad (4.1)$$

ขั้นที่ 2 คำนวณ

$$s_i = \text{prox}_{\rho_i h}(z_i - \rho_i \nabla g(z_i)) \quad (4.2)$$

ขั้นที่ 3 คำนวณ

$$w_i = s_i - \rho_i(\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)) \quad (4.3)$$

ขั้นที่ 4 คำนวณ

$$v_{i+1} = (1 - \beta)z_i + \beta w_i \quad (4.4)$$

และ

$$\rho_{i+1} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{(\delta_i + \delta) \|z_i - s_i\|}{\|\nabla g(z_i) - \nabla g(s_i)\|}, \rho_i + \sigma_i \right\}, & \text{ถ้า } \|\nabla g(z_i) - \nabla g(s_i)\| \neq 0 \\ \rho_i + \sigma_i, & \text{อื่น ๆ} \end{cases} \quad (4.5)$$

ให้ $i := i + 1$ และย้อนกลับไปขั้นที่ 1

บทตั้ง 4.1 กำหนดให้ลำดับ $\{\rho_i\}$ จากวิธีเกรเดียนต์ใกล้เคียงด้วยขั้นตอนเฉื่อยสลับกัน คือขอบเขตของ $\rho_i \in [\min\{\frac{\delta}{L}, \rho_1\}, \rho_1 + \Lambda]$ นอกจากนี้ค่าของ $\rho \in [\min\{\frac{\delta}{L}, \rho_1\}, \rho_1 + \Lambda]$ โดยที่ $\lim_{i \rightarrow +\infty} \rho_i = \rho$ เมื่อ $\Lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$

พิสูจน์ จากนิยามของ ρ_i ถ้า $\|\nabla g(z_i) - \nabla g(s_i)\| \neq 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\rho_i \geq \frac{(\delta_i + \delta)\|z_i - s_i\|}{\|\nabla g(z_i) - \nabla g(s_i)\|} \geq \frac{\delta_i + \delta}{L} \geq \frac{\delta}{L} \quad (4.6)$$

เนื่องจาก $\Lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$

$$\rho_{i+1} \leq \rho_i + \sigma_i \leq \rho_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i = \rho_1 + \Lambda \quad (4.7)$$

ซึ่งหมายความว่า

$$\left\{ \frac{\delta}{L}, \rho_1 \right\} \leq \rho_i \leq \rho_1 + \Lambda \quad (4.8)$$

ทั้งนี้

$$\rho_{i+1} - \rho_i = [\rho_{i+1} - \rho_i]_+ - [\rho_{i+1} - \rho_i]_- \quad (4.9)$$

โดยที่

$$[\rho_{i+1} - \rho_i]_+ = \max\{0, \rho_{i+1} - \rho_i\}$$

และ

$$[\rho_{i+1} - \rho_i]_- = \max\{0, -(\rho_{i+1} - \rho_i)\}$$

ฉะนั้น

$$\rho_{i+1} - \rho_i = \sum_{a=1}^i [\rho_{a+1} - \rho_a]_+ - \sum_{a=1}^i [\rho_{a+1} - \rho_a]_- \quad (4.10)$$

เนื่องจาก $\{\rho_i\}$ คือขอบเขตของ $\sum_{i=1}^{\infty} [\rho_{i+1} - \rho_i]_+ \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i < +\infty$ จะได้ $[\rho_{i+1} - \rho_i]_-$ ลู่เข้า ดังนั้นค่าของ $\rho \in [\min\{\frac{\delta}{L}, \rho_1\}, \rho_1 + \Lambda]$ โดยที่ $\lim_{i \rightarrow +\infty} \rho_i = \rho$ ดังนั้นการพิสูจน์นี้เป็นจริง

บทตั้ง 4.2 กำหนดให้ลำดับ $\{w_i\}$ เป็นลำดับทั่วไป โดยวิธีเกรเดียนต์ใกล้เคียงด้วยขั้นตอนเฉื่อยสลับกัน แล้วทำให้ได้ว่า

$$\|w_i - v^*\|^2 \leq \|z_i - v^*\|^2 - \left\{ 1 - \frac{(\delta_i + \delta)^2 \rho_i^2}{\rho_{i+1}^2} \right\} \|s_i - z_i\|^2, \quad \forall v^* \in \Omega$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $v^* \in \Omega$. แล้วทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|w_i - v^*\|^2 &= \|s_i - \rho_i(\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)) - \| \\
&= \|s_i - \|^2 + \rho_i^2 \|\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)\|^2 - 2\rho_i \langle s_i - v^*, \nabla g(s_i) - \nabla g(z_i) \rangle \\
&= \|s_i - z_i + z_i - \|^2 + \rho_i^2 \|\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)\|^2 \\
&\quad - 2\rho_i \langle s_i - v^*, \nabla g(s_i) - \nabla g(z_i) \rangle \\
&= \|z_i - \|^2 + \|s_i - z_i\|^2 + 2\langle z_i - v^*, s_i - z_i \rangle \\
&\quad - 2\rho_i \langle s_i - v^*, \nabla g(s_i) - \nabla g(z_i) \rangle + \rho_i^2 \|\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)\|^2 \\
&= \|z_i - \|^2 + \|s_i - z_i\|^2 + 2\langle z_i - s_i + s_i - v^*, s_i - z_i \rangle \\
&\quad - 2\rho_i \langle s_i - v^*, \nabla g(s_i) - \nabla g(z_i) \rangle + \rho_i^2 \|\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)\|^2 \\
&= \|z_i - \|^2 + \|s_i - z_i\|^2 - 2\langle s_i - z_i, s_i - z_i \rangle \\
&\quad + 2\langle s_i - v^*, s_i - z_i \rangle - 2\rho_i \langle s_i - v^*, \nabla g(s_i) - \nabla g(z_i) \rangle \\
&\quad + \rho_i^2 \|\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)\|^2 \\
&= \|z_i - \|^2 + \|s_i - z_i\|^2 - 2\langle s_i - v^*, s_i - z_i \rangle \\
&\quad - 2\langle s_i - v^*, \rho_i(\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)) \rangle + \rho_i^2 \|\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)\|^2 \\
&= \|z_i - v^*\|^2 - \|s_i - z_i\|^2 - 2\langle s_i - v^*, z_i - s_i \rangle + \rho_i(\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)) \\
&\quad + \rho_i^2 \|\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)\|^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

ข้อสังเกต

$$\rho_{i+1} = \min \left\{ \frac{(\delta_i + \delta) \|z_i - s_i\|}{\|\nabla g(z_i) - \nabla g(s_i)\|}, \rho_i + \sigma_i \right\} \leq \frac{(\delta_i + \delta) \|z_i - s_i\|}{\|\nabla g(z_i) - \nabla g(s_i)\|} \tag{4.12}$$

ซึ่งหมายความว่า

$$\|\nabla g(z_i) - \nabla g(s_i)\| \leq \frac{\delta_i + \delta}{\rho_{i+1}} \|z_i - s_i\| \tag{4.13}$$

นำสมการที่ (4.13) และสมการที่ (4.11) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|w_i - v^*\|^2 &\leq \|z_i - v^*\|^2 - \|s_i - z_i\|^2 + \frac{(\delta_i + \delta)^2 \rho_i^2}{\rho_{i+1}^2} \|s_i - z_i\|^2 \\
&\quad - 2\langle s_i - v^*, z_i - s_i + \rho_i(\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)) \rangle \\
&= \|z_i - v^*\|^2 - \left(1 - \frac{(\delta_i + \delta)^2 \rho_i^2}{\rho_{i+1}^2} \right) \|s_i - z_i\|^2 \\
&\quad - 2\langle s_i - v^*, z_i - s_i + \rho_i(\nabla g(s_i) - \nabla g(z_i)) \rangle
\end{aligned} \tag{4.14}$$

จากบทนิยามของ s_i ทำให้ได้ว่า $z_i - \rho_i \nabla g(z_i) \in (I + \rho_i \partial h)s_i$ เนื่องจาก ∂h คือ ค่ามากที่สุดทางเดียว แล้วมี $u_i \in \partial h(s_i)$ โดยที่

$$z_i - \rho_i \nabla g(z_i) = s_i + \rho_i u_i \quad (4.15)$$

นั่นคือ

$$u_i = \frac{1}{\rho_i} (z_i - \rho_i \nabla g(z_i) - s_i) \quad (4.16)$$

เนื่องจาก $0 \in (\nabla g + \partial h)(v^*)$ และ $\nabla g(s_i) + u_i \in (\nabla g + \partial h)s_i$ จะได้

$$\langle \nabla g(s_i) + u_i, s_i - v^* \rangle \geq 0 \quad (4.17)$$

แทนค่าสมการ (4.16) ลงในสมการ (4.17) จะได้

$$\frac{1}{\rho_i} \langle z_i - \rho_i \nabla g(z_i) + s_i + \rho_i \nabla g(s_i), s_i - v^* \rangle \geq 0 \quad (4.18)$$

หมายความว่า $\langle z_i - \rho_i \nabla g(z_i) - s_i + \rho_i \nabla g(s_i), s_i - v^* \rangle \geq 0$ จากสมการ (??) จะได้

$$\|w_i - v^*\|^2 \leq \|z_i - v^*\|^2 - \left(1 - \frac{(\delta_i + \delta)^2 \rho_i^2}{\rho_{i+1}^2}\right) \|s_i - z_i\|^2 \quad (4.19)$$

บทตั้ง 4.3 กำหนดให้ $\{v_i\}$ เป็นลำดับทั่วไป จากโดยวิเครเตียนต์ใกล้เคียงด้วยขั้นตอนเฉื่อยสลับกัน แล้วมีลำดับย่อยแบบคู่ $\{v_{2i}\}$ มีขอบเขต และเป็นลำดับ Fejér monotone ซึ่งมีผลเฉลยเป็นชุด Ω นอกจากนี้สำหรับทุก $v^* \in \Omega$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_{2i} - v^*\|^2$ มีค่าและ $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_{2i} - s_{2i}\| = 0$

พิสูจน์ จากนิยามของ v_{i+1} และบทตั้ง 2.1 จะได้

$$\|v_{i+1} - v^*\|^2 = (1 - \beta) \|z_i - v^*\|^2 + \beta \|w_i - v^*\|^2 - \beta(1 - \beta) \|z_i - w_i\|^2 \quad (4.20)$$

จากสมการ (4.20) และบทตั้ง 4.2 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \|v_{i+1} - v^*\|^2 &\leq (1 - \beta) \|z_i - v^*\|^2 + \beta \|z_i - v^*\|^2 - \beta \left(1 - \frac{(\delta_i + \delta)^2 \rho_i^2}{\rho_{i+1}^2}\right) \|s_i - z_i\|^2 \\ &\quad - \beta(1 - \beta) \|z_i - w_i\|^2 \\ &= \|z_i - v^*\|^2 - \beta \left(1 - \frac{(\delta_i + \delta)^2 \rho_i^2}{\rho_{i+1}^2}\right) \|s_i - z_i\|^2 - \beta(1 - \beta) \|z_i - w_i\|^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

กำหนดให้ $i + 1 := 2i + 2$ แทนลงในสมการ (4.21)

$$\begin{aligned} \|v_{2i+2} - v^*\|^2 &\leq \|z_{2i+1} - v^*\|^2 - \beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i+1} + \delta)^2 \rho_{2i+1}^2}{\rho_{2i+2}^2}\right) \|s_{2i+1} - z_{2i+1}\|^2 \\ &\quad - \beta(1 - \beta) \|z_{2i+1} - w_{2i+1}\|^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

นำค่า $i + 1 := 2i + 1$ แทนลงในสมการ (4.21) เมื่อ $z_{2i} = v_{2i}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \|v_{2i+1} - v^*\|^2 &\leq \|v_{2i} - v^*\|^2 - \beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i} + \delta)^2 \rho_{2i}^2}{\rho_{2i+1}^2}\right) \|s_{2i} - v_{2i}\|^2 \\ &\quad - \beta(1 - \beta) \|v_{2i} - w_{2i}\|^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

จากนิยามของ z_{2i+1} และสมการ (4.1) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \|z_{2i+1} - v^*\|^2 &= \|v_{2i+1} + \gamma(v_{2i+1} - v_{2i}) - v^*\|^2 \\ &= \|(1 + \gamma)(v_{2i+1} - v^*) - \gamma(v_{2i} - v^*)\|^2 \\ &= (1 + \gamma) \|v_{2i+1} - v^*\|^2 - \gamma \|v_{2i} - v^*\|^2 \\ &\quad + \gamma(1 + \gamma) \|v_{2i+1} - v_{2i}\|^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

จากนิยามของ v_{2i+1} เมื่อ $z_{2i} = v_{2i}$

$$\|v_{2i+1} - v_{2i}\|^2 = \beta^2 \|w_{2i} - v_{2i}\|^2 \quad (4.25)$$

จากสมการ (4.23) และสมการ (4.25) แทนค่าลงในสมการ (??) จะได้

$$\begin{aligned} \|z_{2i+1} - v^*\|^2 &\leq (1 + \gamma) \left[\|v_{2i} - v^*\|^2 - \beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i} + \delta)^2 \rho_{2i}^2}{\rho_{2i+1}^2}\right) \|s_{2i} - v_{2i}\|^2 \right] \\ &\quad - (1 + \gamma)\beta(1 - \beta) \|v_{2i} - w_{2i}\|^2 - \gamma \|v_{2i} - v^*\|^2 \\ &\quad + \gamma(1 + \gamma)\beta^2 \|w_{2i} - v_{2i}\|^2 \\ &= \|v_{2i} - v^*\|^2 - (1 + \gamma)\beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i} + \delta)^2 \rho_{2i}^2}{\rho_{2i+1}^2}\right) \|s_{2i} - v_{2i}\|^2 \\ &\quad - (1 + \gamma)\beta(1 - \beta - \gamma\beta) \|v_{2i} - w_{2i}\|^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

จากสมการ (4.22) และสมการ (4.26) จะได้

$$\begin{aligned}
\|v_{2i+2} - v^*\|^2 &\leq \|v_{2i} - v^*\|^2 - (1 + \gamma)\beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i} + \delta)^2 \rho_{2i}^2}{\rho_{2i+1}^2}\right) \|s_{2i} - v_{2i}\|^2 \\
&\quad - (1 + \gamma)\beta(1 - \beta - \gamma\beta) \|v_{2i} - w_{2i}\|^2 \\
&\quad - \beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i+1} + \delta)^2 \rho_{2i+1}^2}{\rho_{2i+2}^2}\right) \|s_{2i+1} - z_{2i+1}\|^2 \\
&\quad - \beta(1 - \beta) \|z_{2i+1} - w_{2i+1}\|^2
\end{aligned} \tag{4.27}$$

เนื่องจาก $\gamma \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$ และ $\delta_{2i+1}, \rho_{2i+1}, \rho_{2i+2} > 0$, $\forall i \geq N_0$ จะได้

$$(1 + \gamma)\beta(1 - \beta - \gamma\beta) > 0, \quad \forall i \geq N_0$$

และ

$$(1 + \gamma)\beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i} + \delta)^2 \rho_{2i}^2}{\rho_{2i+1}^2}\right) > 0, \quad \forall i \geq N_0$$

นั่นคือ

$$\beta \left(1 - \frac{(\delta_{2i+1} + \delta)^2 \rho_{2i+1}^2}{\rho_{2i+2}^2}\right) > 0, \quad \forall i \geq N_0$$

เนื่องจากสมการ (4.27)

$$\|v_{2i+2} - v^*\| \leq \|v_{2i} - v^*\|, \quad \forall i \geq N_0 \tag{4.28}$$

ทำให้ได้ว่า $\{\|v_{2i} - v^*\|\}$ และ $\{v_{2i}\}$ มีขอบเขต นอกจากนี้ $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_{2i} - v^*\|$ มีค่า ดังนั้นจากสมการ (4.27) จะได้ว่า

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|s_{2i} - v_{2i}\| = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_{2i} - w_{2i}\| = 0 \tag{4.29}$$

เนื่องจาก $\{v_{2i}\}$ มีขอบเขต และจากสมการ (4.29) ทำให้ได้ว่า $\{s_{2i}\}$ และ $\{w_{2i}\}$ มีขอบเขต ทั้งนี้จากสมการ (4.25) และ (4.29) $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|v_{2i+1} - v_{2i}\| = 0$ เนื่องจาก ∇g คือต่อเนื่องปกติ จะได้

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|\nabla g(z_{2i}) - \nabla g(s_{2i})\| = 0 \tag{4.30}$$

ทฤษฎีบท 4.4 กำหนดให้ลำดับ $\{v_i\}$ เป็นลำดับทั่วไป จากวิธีเกรเดียนต์ใกล้เคียงด้วยขั้นตอนเฉื่อยสลับกัน กำหนดให้ $v^* \in H$ คือ weak limit ของลำดับย่อย $\{v_{2i_a}\}$ ของ $\{v_{2i}\}$. แล้วจะได้ $v^* \in \Omega$

พิสูจน์ โดยที่ $v_{2i_a} \rightharpoonup v^* \in H$ จากบทตั้ง 4.3 จะได้ $v_{2i_a+1} \rightharpoonup v^*$ สังเกตได้ว่า

$$s_{2i_a} = \text{prox}_{\rho_{2i_a}h}(z_{2i_a} - \rho_{2i_a} \nabla g(z_{2i_a})) \quad (4.31)$$

จากสมการ (4.2) จะได้

$$\frac{z_{2i_a} - \rho_{2i_a} \nabla g(z_{2i_a}) - s_{2i_a}}{\rho_{2i_a}} \in \partial h(s_{2i_a}) \quad (4.32)$$

นั่นคือ

$$\frac{z_{2i_a} - s_{2i_a}}{\rho_{2i_a}} - \nabla g(z_{2i_a}) + \nabla g(s_{2i_a}) \in \partial h(s_{2i_a}) + \nabla g(s_{2i_a}). \quad (4.33)$$

เนื่องจาก $\lim_{i \rightarrow +\infty} \|s_{2i} - v_{2i}\| = 0$ ทำให้ได้ว่า $s_{2i_a} \rightharpoonup v^*$ แทนค่า $a \rightarrow +\infty$ ลงในสมการ (3.30) และสมการ (3.27) จากบทตั้ง 2.2 และบทตั้ง 3.1 จะได้

$$0 \in (\partial h + \nabla g)(v^*) \quad (4.34)$$

ดังนั้น $v^* \in \Omega$ จากสมการ (4.23) ทำให้ได้ว่า $\{v_{2i}\}$ คือ ลำดับ quasi-Fejér และจากบทตั้ง 2.1 ทำให้ได้ว่า $\{v_{2i}\}$ เข้าสู่แบบ weakly ที่จุด Ω

ผลการคำนวณเชิงตัวเลข

ในส่วนนี้ได้นำเสนอการทดลองเชิงตัวเลขต่าง ๆ เพื่อแสดงให้เห็นอัลกอริทึม และทฤษฎีบทที่คิดค้นมาใหม่และพัฒนาให้ดียิ่งขึ้น

$$\min_{v \in \mathbb{R}^3} \|v\|_1 + 3\|v\|_2^2 + (-2, 1, 4)v + 9$$

เมื่อ $v = (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3$ กำหนดให้ $g(v) = 3\|v\|_2^2 + (-2, 1, 4)v + 9$ และ $h(v) = \|v\|_1$ นั่นคือ $\nabla g(v) = 6v + (-2, 1, 4)^T$ โดยตรวจสอบ g คือฟังก์ชันคอนเวกซ์และหาอนุพันธ์ได้ และเกรเดียน ∇g คือ ลิพชิตต่อเนื่อง ซึ่ง $L = 6$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$\text{prox}_{\rho_i \|\cdot\|_1}(v) = [\text{prox}_{\rho_i|\cdot|}(v_1), \text{prox}_{\rho_i|\cdot|}(v_2), \text{prox}_{\rho_i|\cdot|}(v_3)]^T$$

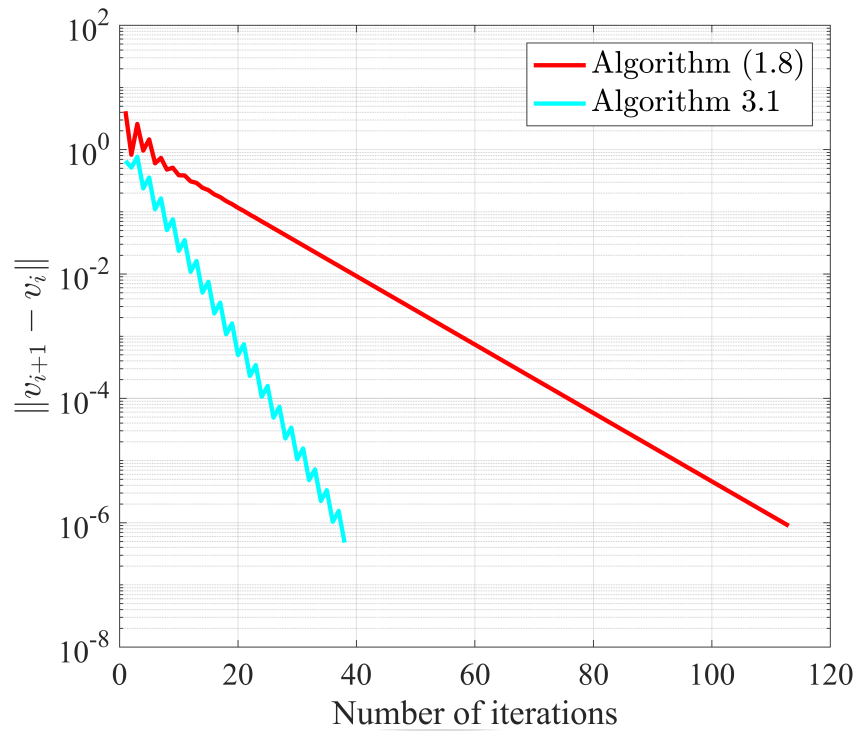
เมื่อ $\text{prox}_{\rho_i|\cdot|}(v_i) = \max\{|v_i| - \rho_i, 0\} \text{sign}(v_i)$, และ v_i เป็นสมาชิกของ v และ $i = 1, 2, 3$ ในส่วนของผลการทดลองจะทำการเปรียบเทียบอัลกอริทึม (1.8) ดังข้างล่างต่อไปนี้

- วิธีเกรเดียนต์ใกล้เคียงด้วยขั้นตอนเฉื่อยสลับกัน (อัลกอริทึม 3.1) กำหนด $\rho_1 = \frac{0.6}{L}$, $\gamma = 0.9$, $\beta = 0.9$, $\delta = 0.6$, $\delta_i = \frac{1}{(1000i+2)^{10}}$, $\sigma_i = \frac{99i}{100i+1}$
- อัลกอริทึม (1.8) กำหนด $\rho_1 = \frac{0.6}{L}$, $\mu = 0.4$

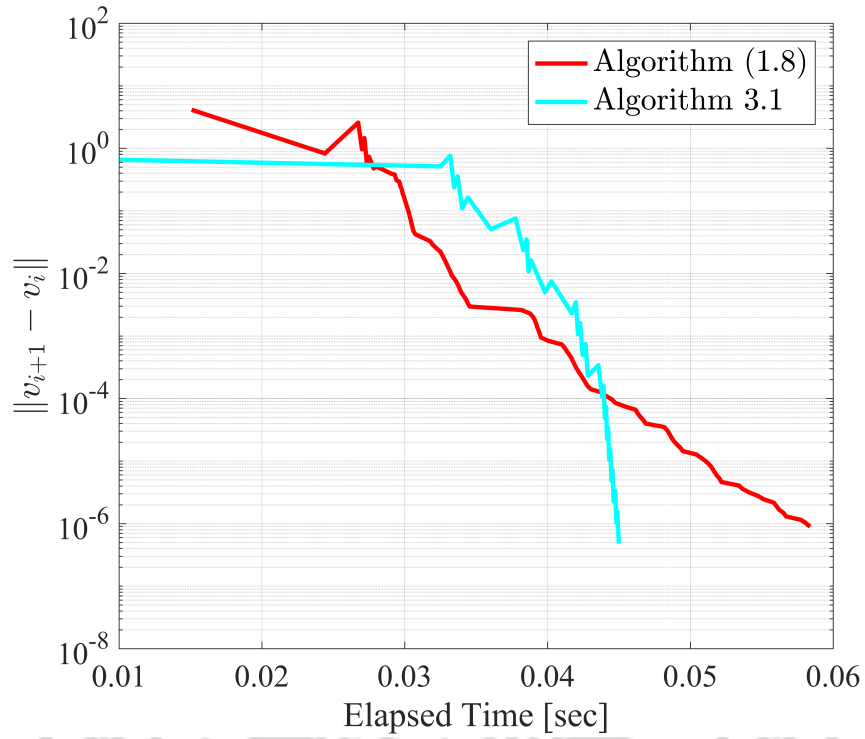
ทั้งนี้ทำการทดลองเชิงตัวเลขที่จุด v_1 แตกต่างกัน 4 ค่า และใช้เกณฑ์การหยุดของการทำซ้ำที่ $\|v_{i+1} - v_i\| \leq \epsilon = 10^{-6}$ ดังตารางที่ 4.1 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของอัลกอริทึม

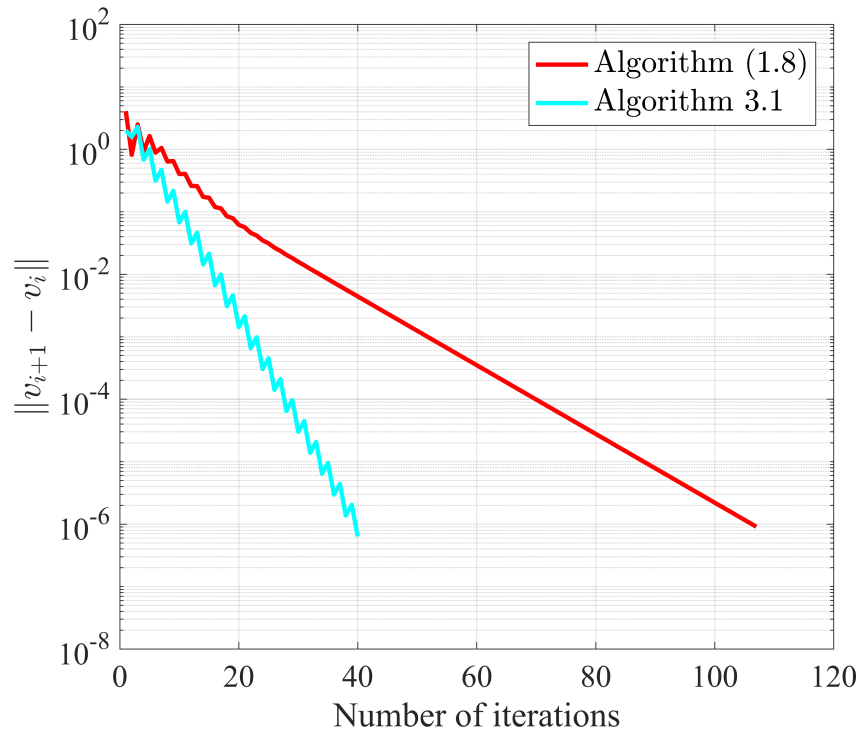
$v_1 = v_0$	Number of Iteration		Execution Time in Seconds	
	Algorithm (1.8)	Algorithm 3.1	Algorithm (1.8)	Algorithm 3.1
$(1, 3, 5)^T$	113	38	0.058383	0.044992
$(1, -6, 2)^T$	107	40	0.121066	0.093168
$(-200, 200, 100)^T$	138	48	0.073472	0.020173
$(-1000, -5000, 500)^T$	151	56	0.057175	0.033351



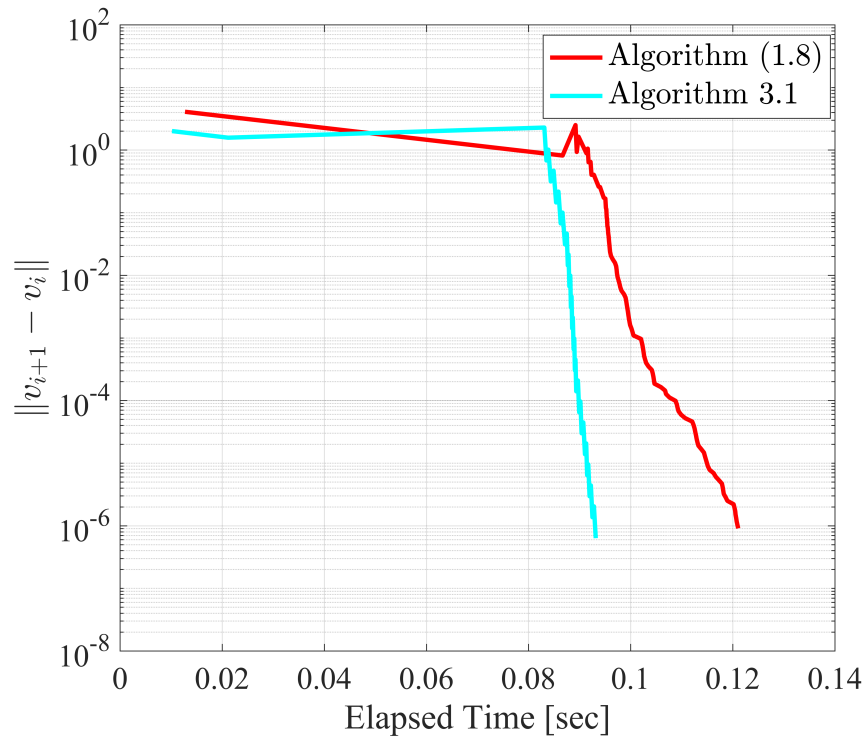
ภาพที่ 4.1 กราฟความคลาดเคลื่อนและจำนวนทำซ้ำที่ $v_1 = (1, 3, 5)^T$



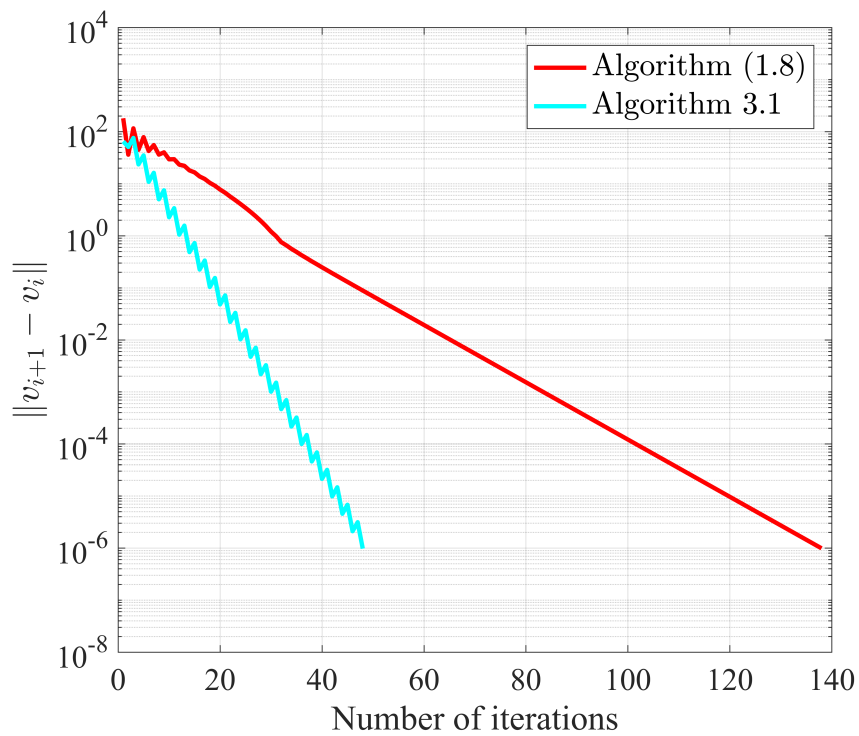
ภาพที่ 4.2 กราฟความคลาดเคลื่อนและเวลาในการคำนวณที่ $v_1 = (1, 3, 5)^T$



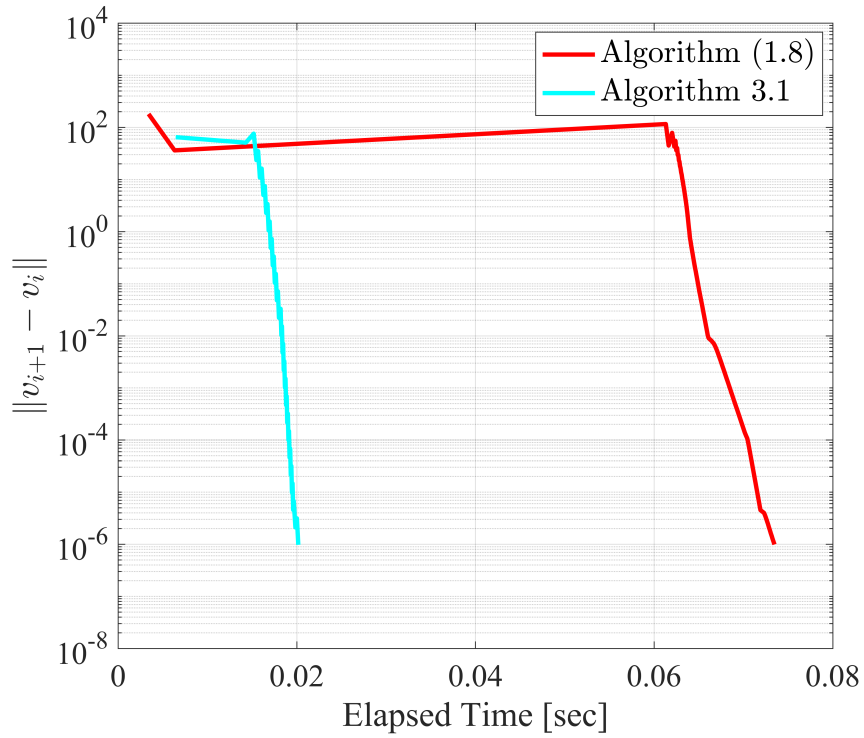
ภาพที่ 4.3 กราฟความคลาดเคลื่อนและจำนวนทำซ้ำที่ $v_1 = (1, -6, 2)^T$



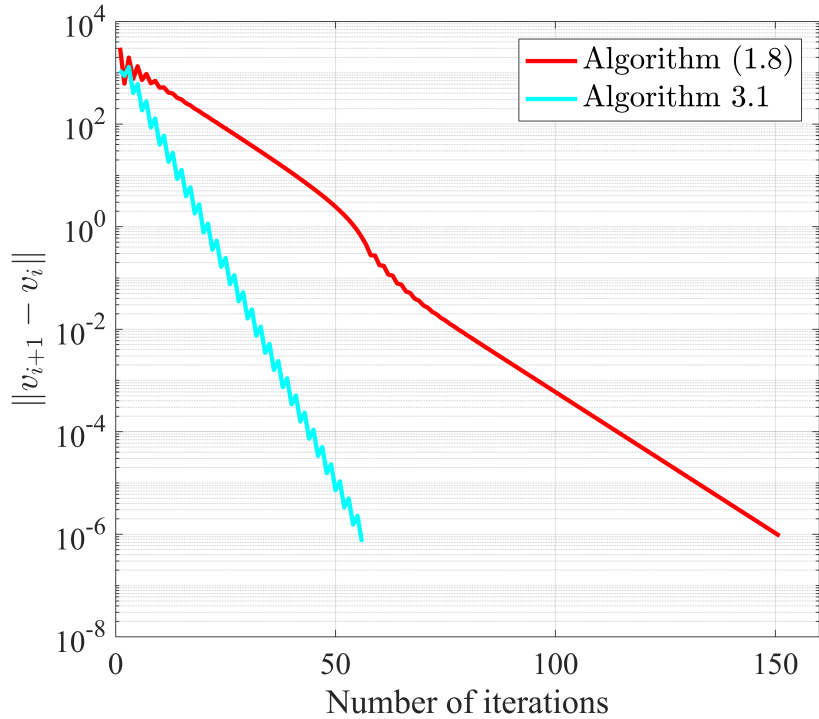
ภาพที่ 4.4 กราฟความคลาดเคลื่อนและเวลาในการคำนวณที่ $v_1 = (1, -6, 2)^T$



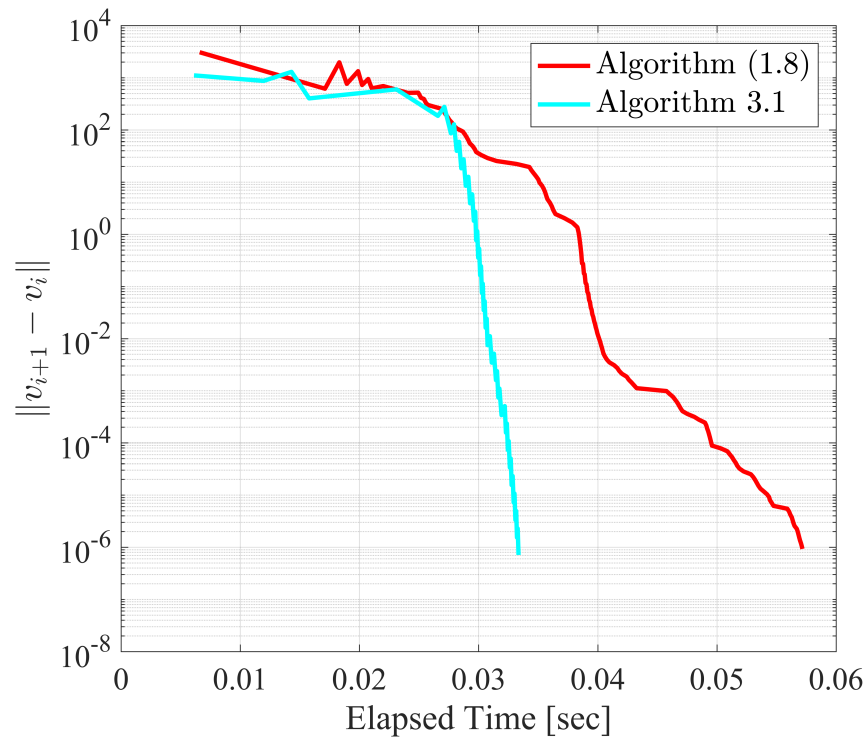
ภาพที่ 4.5 กราฟความคลาดเคลื่อนและจำนวนทำซ้ำที่ $v_1 = (-200, 200, 100)^T$



ภาพที่ 4.6 กราฟความคลาดเคลื่อนและเวลาในการคำนวณที่ $v_1 = (-200, 200, 100)^T$



ภาพที่ 4.7 กราฟความคลาดเคลื่อนและจำนวนทำซ้ำที่ $v_1 = (-1000, -5000, 500)^T$



ภาพที่ 4.8 กราฟความคลาดเคลื่อนและเวลาในการคำนวณที่ $v_1 = (-1000, -5000, 500)^T$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี