

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัยแบ่งเป็นขั้นตอนดังนี้

1. ค้นหาเอกสารใหม่ในหัวข้อการมีอยู่จริงของการเกิดขึ้นพร้อมกันและจุดตรงร่วมและหัวข้อที่มีความเกี่ยวข้อง
2. ศึกษาหลักการเบื้องต้น แนวคิด และวิธีการในการสร้างทฤษฎีบทจากเอกสารหนังสือ และเอกสารในข้อ 1.
3. ทำการพิสูจน์เพื่อหาผลลัพธ์ใหม่เกี่ยวกับการมีอยู่จริงของการเกิดขึ้นพร้อมกันและจุดตรงร่วม
4. ตรวจสอบความถูกต้องของทฤษฎีที่สร้างขึ้น
5. แสดงตัวอย่างของการเกิดขึ้นพร้อมกันและจุดตรงร่วม
6. เขียนรายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการวิจัย

บทนิยาม 4.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบิอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $\varphi : \Omega \times \Omega \rightarrow [1, +\infty)$ และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ ให้ V และ Q เป็นการส่งบน Ω จะกล่าวว่า (V, Q) เป็นการส่งแบบซุซูกิ $Z_{(\alpha, \beta)}$ ทั่วไป ถ้าทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(V\kappa, V\varpi)\} \quad \text{ทำให้ได้ว่า}$$
$$\eta(\alpha(Q\kappa, Q\varpi)B(\kappa, \varpi), A(\kappa, \varpi)) \geq 0 \quad (4.1)$$

เมื่อ $\eta \in Z_\psi$

$$B(\kappa, \varpi) = \beta(Q\kappa, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

และ

$$A(\kappa, \varpi) = \max \left\{ d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, V\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi), \right. \\ \left. \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(Q\kappa, V\kappa) + d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(V\kappa, V\varpi) + d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)} \right\} \\ + L \min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)\}$$

ด้วย

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\kappa)d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบิอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยายบริบูรณ์ และการส่ง $V, Q : \Omega \rightarrow \Omega$ เป็นการส่งแบบคู่ที่เข้ากันได้ ซึ่ง $V(\Omega) \subseteq Q(\Omega)$ ให้ (V, Q) เป็นการส่งแบบซุซูกิ $Z_{(\alpha, \beta)}$ ทั่วไป และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- (1) V เป็นการส่งแบบ α -แอดมิชซิเบิล ที่ขึ้นอยู่กับ การส่ง Q
- (2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(Qx_0, Vx_0) \geq 1$

(3) ถ้า $\{Q\kappa_n\}$ เป็นลำดับใน Ω ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก n และ $Q\kappa_n \rightarrow Qz \in Q(\Omega)$ as $n \rightarrow +\infty$ แล้วมีลำดับย่อย $\{Q\kappa_{n(k)}\}$ ของ $\{Q\kappa_n\}$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_{n(i)}, Qz) \geq 1$ สำหรับทุก k

(4) $Q(\Omega)$ เป็นเซตปิด

แล้ว V และ Q มีจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันเพียงจุดเดียวใน Ω

พิสูจน์ จากเงื่อนไขที่ (2) ให้ $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ เนื่องจาก $V(\Omega) \subseteq Q(\Omega)$ สามารถเลือกจุด $\kappa_1 \in \Omega$ ซึ่ง $V\kappa_0 = Q\kappa_1$ ดำเนินการตามกระบวนการนี้ต่อไปโดยเลือกแล้ว $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_n$ เลือก κ_{n+1} ใน Ω ซึ่ง

$$V\kappa_n = Q\kappa_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

จากเงื่อนไขที่ (1) มี V เป็นการส่งแบบ α -แอดมิซิเบิล ที่ขึ้นอยู่กับ การส่ง Q จะได้ว่า

$$\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) = \alpha(Q\kappa_0, Q\kappa_1) \geq 1 \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \quad \alpha(V\kappa_0, V\kappa_1) = \alpha(Q\kappa_1, Q\kappa_2) \geq 1$$

ใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้

$$\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\beta(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

ถ้า $V\kappa_{n+1} = V\kappa_n$ สำหรับบาง n โดย (4.1) จะมี $Q\kappa_{n+1} = V\kappa_{n+1}$ ดังนั้น κ_{n+1} เป็นจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันของ V และ Q กรณีอื่น สมมติให้ $d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) > 0$ สำหรับทุก n โดย (4.1), (4.3) และ (4.4) จะได้

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(V\kappa_n, Q\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, Q\kappa_{n+1})\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1})\}$$

ทำให้ได้ว่า **ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี**

$$\eta(\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n, \kappa_{n+1}), A(\kappa_n, \kappa_{n+1})) \geq 0 \quad (4.5)$$

และ

$$\psi(A(\kappa_n, \kappa_{n+1})) - \psi(\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n, \kappa_{n+1})) > 0$$

ดังนั้น

$$\psi(A(\kappa_n, \kappa_{n+1})) > \psi(\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n, \kappa_{n+1}))$$

จากนิยามของ ψ จะได้

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) > \alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \quad (4.6)$$

ซึ่ง

$$B(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \beta(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) \quad (4.7)$$

และ

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \max \left\{ d_\varphi(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(Q\kappa_n, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, Q\kappa_{n+1}), \right. \\ \left. \frac{G(\kappa_n, \kappa_{n+1}) + H(\kappa_n, \kappa_{n+1})}{1 + d_\varphi(Q\kappa_n, V\kappa_n) + d_\varphi(V\kappa_{n+1}, Q\kappa_{n+1})}, \frac{G(\kappa_n, \kappa_{n+1}) + H(\kappa_n, \kappa_{n+1})}{1 + d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) + d_\varphi(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})} \right\} \\ + L \min \{ d_\varphi(V\kappa_n, Q\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(V\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \} \quad (4.8)$$

ด้วย

$$G(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n, Q\kappa_{n+1})d_\varphi(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \quad (4.9)$$

และ

$$H(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n, Q\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) \quad (4.10)$$

ดังนั้น

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \max \left\{ d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n), \right. \\ \left. \frac{G(\kappa_n, \kappa_{n+1}) + H(\kappa_n, \kappa_{n+1})}{1 + d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) + d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)}, \frac{G(\kappa_n, \kappa_{n+1}) + H(\kappa_n, \kappa_{n+1})}{1 + d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) + d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)} \right\} \\ + L \min \{ d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n-1}), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_n) \} \quad (4.11)$$

ด้วย

$$G(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) = 0 \quad (4.12)$$

และ

$$H(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n-1})d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) \quad (4.13)$$

จาก (4.10), (4.11) และ (4.12) จะได้ว่า

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \max \left\{ d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n), \right. \\ \left. \frac{G(\kappa_n, \kappa_{n+1}) + H(\kappa_n, \kappa_{n+1})}{1 + d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) + d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)}, \frac{d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n-1})d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1})}{1 + d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) + d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)} \right\} \\ + L \min \{ d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n-1}), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n), 0 \} \quad (4.14)$$

เนื่องจาก $d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) \leq 1 + d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) + d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)$ และจาก (4.13) จะได้

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \max \left\{ d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) \right\} \quad (4.15)$$

ถ้า $A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)$ และ (4.6) จะได้ว่า

$$d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) < d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) \quad (4.16)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสำหรับทุก $n \geq 1$ จะได้

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) \quad (4.17)$$

จาก (4.6) จะได้

$$\alpha(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)\beta(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) < d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) \quad (4.18)$$

ดังนั้น

$$d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) < d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) \quad (4.19)$$

ลำดับ $\{d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม ดังนั้นมี $r \geq 0$ ซึ่ง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) = r$$

จะพิสูจน์ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) = 0 \quad (4.20)$$

ให้ $r > 0$ โดย (4.16) จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)\beta(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) = r \quad (4.21)$$

เนื่องจาก $r > 0$ และให้ $\varpi_n = \alpha(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)\beta(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)$ และ $\kappa_n = d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \varpi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = r$ โดย (η_2) จะได้

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\varpi_n, \kappa_n) < 0$$

เนื่องจาก $\eta(\varpi_n, \kappa_n) \geq 0$ ดังนั้น

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\varpi_n, \kappa_n) < 0$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $r = 0$. จะได้ว่า $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคซีใน (Ω, d_φ)

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_m) = 0 \quad (4.22)$$

สมมติให้ $\{\kappa_n\}$ ไม่เป็นลำดับโคซี แล้วจะมี $\epsilon > 0$ ลำดับย่อย $\kappa_{n(k)}$ และ $\kappa_{m(k)}$ of $\{\kappa_n\}$ ด้วย $n(k) > m(k) > k$ ซึ่ง k

$$d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) \geq \epsilon \quad (4.23)$$

และ $n(k)$ เป็นจำนวนที่เล็กที่สุด จาก (4.23) จะได้ว่า

$$d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) < \epsilon \quad (4.24)$$

โดยอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (4.22) จะได้

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) \\ &\leq d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{n(k)-1}) + d_\varphi(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)}) \\ &< d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{n(k)-1}) + \epsilon \end{aligned} \quad (4.25)$$

ให้ $n \rightarrow \infty$ และประยุกต์ใช้ (4.20) จะได้ว่า

$$\epsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) < \epsilon$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) = \epsilon \quad (4.26)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)+1}) = \epsilon \quad (4.27)$$

และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)}) = \epsilon \quad (4.28)$$

ใช้ (4.6) และ (η_2) จะได้

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\alpha(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)})\beta(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)})d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)+1}), \\ &\quad d_\varphi(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)})) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคซี และ $\{V\kappa_n\} = \{Q\kappa_{n+1}\}$ เป็นลำดับโคซีใน Ω เนื่องจาก $Q(\Omega)$ เป็นเซตปิด มี $z \in \Omega$ ซึ่ง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q\kappa_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V\kappa_{n+1} = Qz \quad (4.30)$$

จะแสดงว่า z เป็นจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันของ V และ Q สมมติให้ $d_\varphi(Vz, Qz) > 0$ ใช้เงื่อนไขที่ (3) และ (4.30) จะได้ $\alpha(Q\kappa_{n(k)}, Qz) \geq 1$ สำหรับ k ดังนั้น

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, Q\kappa_{n(k)}), d_\varphi(Vz, Qz)\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa_{n(k)}, Q\kappa_{n(k)}), d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, Vz)\}$$

ให้ $k \rightarrow \infty$ ในสมการข้างต้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min\{d_\varphi(Vz, Qz), d_\varphi(Vz, Qz)\} &\leq \max\{d_\varphi(Qz, Qz), d_\varphi(Vz, Vz)\} \\ &= \max\{0, 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $d_\varphi(Vz, Qz) = 0$ นี่คือ $Vz = Qz$ ซึ่งได้แสดงว่า V และ Q มีจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกัน

ทฤษฎีบท 4.2 มีเงื่อนไขเช่นเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 โดยมี $\rho, \sigma \in C(V, Q)$ ถ้า $\alpha(Q\rho, Q\sigma) \geq 1$ และ (V, Q) เป็นคู่ที่เข้ากันได้แบบอ่อน แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียว

พิสูจน์ จากการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\{Q\kappa_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดและลู่เข้าสู่ Qz และ $Vz = Qz$ เนื่องจาก V และ Q เป็นคู่ที่เข้ากันได้แบบอ่อน จะได้ว่า

$$Vz = VQz = QVz = Qz$$

ให้ $u = Vz = Qz$ จะได้

$$u = Vu = Qu$$

ดังนั้น V และ Q มีจุดตรึงร่วมกัน ต่อไปจะพิสูจน์ว่ามีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียว โดยให้ u และ u' เป็นสองจุดตรึงร่วมกันของ V และ Q คือ

$$u = Vu = Qu \quad \text{and} \quad u' = Vu' = Qu'$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min\{d_\varphi(Vu, Qu), d_\varphi(Vu', Qu')\} &= 0 \\ &\leq \max\{d_\varphi(Qu, Qu'), d_\varphi(Vu, Vu')\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\eta(\alpha(Qu, Qu')B(u, u'), A(u, u')) \geq 0 \quad (4.32)$$

และ

$$\psi(A(u, u')) - \psi(\alpha(Qu, Qu')B(u, u')) > 0 \quad (4.33)$$

ดังนั้น

$$\psi(A(u, u')) > \psi(\alpha(Qu, Qu')B(u, u')) \quad (4.34)$$

จากนิยามของ ψ จะได้ว่า

$$A(u, u') > \alpha(Qu, Qu')B(u, u') = \alpha(u, u')B(u, u') \quad (4.35)$$

ซึ่ง

$$B(u, u') = \beta(Qu, Qu')d_\varphi(Vu, Vu') = \beta(u, u')d_\varphi(u, u') \quad (4.36)$$

และ

$$A(u, u') = \max \left\{ d_\varphi(Qu, Qu'), d_\varphi(Qu, Vu), d_\varphi(Vu', Qu'), \frac{G(u, u') + H(u, u')}{1 + d_\varphi(Qu, Vu) + d_\varphi(Vu', Qu')}, \frac{G(u, u') + H(u, u')}{1 + d_\varphi(Vu, Vu') + d_\varphi(Qu, Qu')} \right\} + L \min \{ d_\varphi(Vu, Qu), d_\varphi(Vu', Qu'), d_\varphi(Qu, Qu'), d_\varphi(Vu, Qu') \} \quad (4.37)$$

ด้วย

$$G(u, u') = d_\varphi(Vu, Qu')d_\varphi(Qu, Qu') \quad (4.38)$$

และ

$$H(u, u') = d_\varphi(Vu, Qu)d_\varphi(Vu, Vu') = 0 \quad (4.39)$$

จาก (4.37), (4.38) และ (4.39) จะได้ว่า

$$A(u, u') = d_\varphi(u, u') \quad (4.40)$$

จาก (4.35), (4.36) และ (4.40) จะได้

$$\alpha(u, u')\beta(u, u')d_\varphi(u, u') < d_\varphi(u, u') \quad (4.41)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น V และ Q มีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียวใน Ω

บทนิยาม 4.2 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบปีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $V, Q : \Omega \rightarrow \Omega$ จะเรียก (V, Q) เป็นซุชุกิ $Z_{(\alpha, \beta)}$ ถ้าสำหรับทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi)\} &\leq d_\varphi(\kappa, \varpi) \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \\ \eta(\alpha(\kappa, V\kappa)B(\kappa, \varpi), A(\kappa, \varpi)) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

เมื่อ $\eta \in Z_\psi$

$$A(\kappa, \varpi) = \beta(\varpi, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$\begin{aligned} A(\kappa, \varpi) = \max \left\{ d_\varphi(\kappa, \varpi), d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), \right. \\ \left. \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\kappa) + d_\varphi(\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\varpi) + d_\varphi(\varpi, V\kappa)} \right\} \\ + L \min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), d_\varphi(\kappa, Q\varpi), d_\varphi(\varpi, V\kappa)\} \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\kappa, V\kappa)d_\varphi(\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\varpi, Q\varpi)d_\varphi(\varpi, V\kappa)$$

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบปีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยายบริบูรณ์ และ $V, Q : \Omega \rightarrow \Omega$ เป็นการส่ง และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- (1) (V, Q) เป็นการส่ง (α, β) -แอตมิชชิวิล
- (2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_0, Q\kappa_0) \geq 1$
- (3) (V, Q) เป็นซุชุกิ $Z_{(\alpha, \beta)}$
- (4) V และ Q ต่อเนื่อง หรือ ทุกลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω ซึ่ง $\alpha(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\kappa_n \rightarrow \rho$ จะได้ว่า $\alpha(\kappa, V\kappa) \geq 1$ และ $\beta(\kappa, Q\kappa) \geq 1$

แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมใน Ω

พิสูจน์ โดยเงื่อนไข (2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ ให้ลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω และ $\kappa_1 \in \Omega$ ซึ่ง

$$\kappa_1 = V\kappa_0, \kappa_2 = Q\kappa_1, \kappa_3 = V\kappa_2, \kappa_4 = Q\kappa_3$$

จะได้ว่า

$$V\kappa_n = \kappa_{n+1} \quad \text{และ} \quad Q\kappa_{n+1} = \kappa_{n+2}$$

จาก (V, Q) เป็น (α, β) -แอดมิชชีเบิล จะได้

$$\begin{aligned}\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) &= \alpha(\kappa_0, \kappa_1) \geq 1, \\ \alpha(V\kappa_0, Q\kappa_1) &= \alpha(\kappa_1, \kappa_2) \geq 1, \\ \alpha(Q\kappa_1, V\kappa_2) &= \alpha(\kappa_2, \kappa_3) \geq 1\end{aligned}$$

และ

$$\alpha(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1, \quad \forall n \geq 0$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\beta(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1, \quad \forall n \geq 0$$

ถ้า $\kappa_n = \kappa_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $\rho = \kappa_n$ มีจุดตรึงร่วมของ V หรือ Q สมมติว่า $\kappa_n \neq \kappa_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})\} \leq d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})$$

จาก (4.1) จะได้

$$\eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) \geq 0$$

และ

$$\psi(A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) - \psi(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) > 0$$

ดังนั้น

$$\psi(A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) > \psi(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}))$$

จากนิยามของ ψ จะได้ว่า

$$A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) > \alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) \quad (4.43)$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = \beta(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) \quad (4.44)$$

และ

$$\begin{aligned}
 A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = & \max \left\{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), \right. \\
 & \frac{G(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + H(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})}, \\
 & \left. \frac{G(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + H(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}) + d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+1})} \right\} \\
 & + L \min \{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), \\
 & d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+1}) \}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

ซึ่ง

$$G(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}) \tag{4.46}$$

และ

$$H(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+1}) \tag{4.47}$$

จาก (4.45), (4.46) และ (4.47) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = & \max \left\{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), \right. \\
 & \left. \frac{d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})}, \frac{d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2})} \right\} \\
 & + L \min \{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}), 0 \} \\
 = & \max \left\{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) \right\}
 \end{aligned}$$

ถ้า $A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})$ และโดย (4.43) จะได้ว่า

$$d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) < d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น

$$A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) \tag{4.48}$$

โดย (4.43) จะได้

$$d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) < d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})$$

สรุปได้ว่า $\{d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}$ ไม่ลบและไม่ลด ดังนั้นมี $r \geq 0$ ซึ่ง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = r$$

เห็นชัด ถ้า $r = 0$ สมมติว่า $r > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = r \quad (4.49)$$

สำหรับทุก $n \geq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})\} \leq d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})$$

จาก (4.1) จะได้ว่า

$$\eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) \geq 0$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = \beta(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})d_\varphi(V\kappa_{2n}, Q\kappa_{2n+1})$$

และ

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) \geq 0$$

โดยเงื่อนไข (η_2) ของบทนิยาม 2.4 จะได้ว่า

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) < 0$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = 0 \quad (4.50)$$

จะแสดงว่า $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคซี สมมติว่า $\{\kappa_n\}$ ไม่เป็นลำดับโคซี แล้วมี $\varepsilon_0 > 0$ และลำดับเพิ่มทางเดียวของจำนวนธรรมชาติ $\{m_k\}$ และ $\{n_k\}$ ซึ่ง $n_k > m_k$ และ $d_\varphi(\kappa_{2m_k}, \kappa_{2n_k}) \geq \varepsilon_0$ และ

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k}, \kappa_{2n_k}) = \varepsilon_0$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1}) = \varepsilon_0$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k}, \kappa_{2n_k+1}) = \varepsilon_0$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k}) = \varepsilon_0$$

จากนิยามของ $A(\kappa, \varpi)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} A(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max \left\{ d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}), d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k}), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) + H(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}) + d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k})}, \frac{G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) + H(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k}) + d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1})} \right\} \right. \\ & \quad \left. + L \min \{ d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}), d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k}), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k}), d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1}) \} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

ซึ่ง

$$G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) = d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1})d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k}) \quad (4.52)$$

และ

$$H(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) = d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k})d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1}) \quad (4.53)$$

จาก (4.51), (4.52) และ (4.53) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) &= \max\{\varepsilon_0, 0, 0, 0, 0\} + L \min\{0, 0, \varepsilon_0, \varepsilon_0\} \\ &= \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

และ

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) \\ &= \varepsilon_0 > 0 \end{aligned}$$

โดยเงื่อนไข (η_2) ของบทนิยาม 2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) \\ &= \varepsilon_0 > 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

ตรงกันข้าม ยืนยันว่ามีขนาดใหญ่เพียงพอ $k \in \mathbb{N}$ ถ้า $n_k > m_k > k$ แล้ว

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(\kappa_{n_k}, V\kappa_{n_k}), d_\varphi(\kappa_{m_k-1}, Q\kappa_{m_k-1})\} > d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{m_k-1}) \quad (4.56)$$

เมื่อ $k \rightarrow \infty$ ใน (4.56) จะได้ว่า $\varepsilon_0 \leq 0$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(\kappa_{n_k}, V\kappa_{n_k}), d_\varphi(\kappa_{m_k-1}, Q\kappa_{m_k-1})\} \leq d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{m_k-1})$$

จาก (4.1) จะได้ว่า

$$\eta(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k-1}), A(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1})) \geq 0$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k-1}) = \beta(\kappa_{2m_k-1}, Q\kappa_{2m_k-1})d_\varphi(V\kappa_{2n_k}, Q\kappa_{2m_k-1})$$

ดังนั้น

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k-1}), A(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1})) \geq 0 \quad (4.57)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง (4.55) ทำให้ได้ว่า $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคซี และเนื่องจาก Ω บริบูรณ์ มี $\rho \in \Omega$ ซึ่ง $\{\kappa_n\} \rightarrow \rho$ ที่ $n \rightarrow \infty$ จะได้ ρ เป็นจุดตรึงของ V และ Q เพราะ V และ Q ต่อเนื่อง สามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} V\kappa_{2n} \\ &= V\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{2n}\right) = V\rho \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q\kappa_{2n+1} \\ &= Q\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{2n+1}\right) = Q\rho \end{aligned}$$

ดังนั้น $V\rho = Q\rho = \rho$ นั่นคือ ρ เป็นจุดตรึงร่วมของ V และ Q จาก (iv) จะได้ว่าทุกลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω ซึ่ง $\alpha(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $\kappa_n \rightarrow \rho$ ที่ $n \rightarrow \infty$ ทำให้ได้ว่า $\kappa_{2n_k+1} \rightarrow \rho$ และ $\kappa_{2n_k+2} \rightarrow \rho$ ที่ $k \rightarrow \infty$ จะแสดงว่า $V\rho = Q\rho = \rho$ โดยสมมติว่า $\rho \neq Q\rho$ สำหรับทุก $n \geq 1$ มีอย่างน้อยหนึ่งข้อต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) \leq d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \rho)$$

หรือ

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{n_k+1}) \leq d_\varphi(\kappa_{n_k}, \rho)$$

สมมุติว่า

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) > d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \rho)$$

และ

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{n_k+1}) > d_\varphi(\kappa_{n_k}, \rho)$$

สำหรับบาง $n \geq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) &\leq d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \rho) + d_\varphi(\rho, \kappa_{n_k}) \\ &< \frac{1}{2}[d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) + d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{n_k+1})] \\ &\leq d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) \end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง และสิ่งที่คาดไว้เป็นจริง จาก (4.1) จะได้

$$\frac{1}{2} \min\{d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}), d_\varphi(\rho, Q\rho)\} \leq d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \rho)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\leq \eta(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho), A(\kappa_{2n_k}, \rho)) \\ &< \psi(A(\kappa_{2n_k}, \rho)) - \psi(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho)) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\psi(A(\kappa_{2k}, \rho)) > \psi(\alpha(\kappa_{2k}, V\kappa_{2k})B(\kappa_{2n_k}, \rho))$$

เนื่องจาก ψ เป็นการเพิ่มอย่างเข้มจะได้ว่า

$$A(\kappa_{2n_k}, \rho) > \alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho) \quad (4.58)$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n_k}, \rho) = \beta(\rho, Q\rho)d_\varphi(V\kappa_{2n_k}, Q\rho) \quad (4.59)$$

และ

$$\begin{aligned} A(\kappa_{2n_k}, \rho) = \max \left\{ d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \rho), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}), d_\varphi(\rho, Q\rho), \right. \\ \left. \frac{G(\kappa_{2n_k}, \rho) + H(\kappa_{2n_k}, \rho)}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}) + d_\varphi(\rho, Q\rho)}, \frac{G(\kappa_{2n_k}, \rho) + H(\kappa_{2n_k}, \rho)}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, Q\rho) + d_\varphi(\rho, V\kappa_{2n_k})} \right\} \\ + L \min\{d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}), d_\varphi(\rho, Q\rho), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, Q\rho), d_\varphi(\rho, V\kappa_{2n_k})\} \end{aligned} \quad (4.60)$$

ซึ่ง

$$G(\kappa_{2n_k}, \rho) = d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})d_\varphi(\kappa_{2n_k}, Q\rho) \quad (4.61)$$

และ

$$H(\kappa_{2n_k}, \rho) = d_\varphi(\rho, Q\rho)d_\varphi(\rho, V\kappa_{2n_k}) \quad (4.62)$$

ให้ $k \rightarrow \infty$ ใน (4.60) จะได้ว่า

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(\kappa_{2k}, \rho) = d_\varphi(\rho, H\rho)$$

จาก (4.58) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d_\varphi(V\kappa_{2n_k}, Q\rho) \\ \leq \alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho) \\ < A(\kappa_{2n_k}, \rho) \end{aligned} \quad (4.63)$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n_k}, \rho) = \beta(\rho, Q\rho)d_\varphi(V\kappa_{2n_k}, Q\rho)$$

ให้ $k \rightarrow \infty$ ใน (4.63) จะได้ว่า

$$d_\varphi(\rho, Q\rho) < d_\varphi(\rho, Q\rho)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\rho = Q\rho$ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\rho = V\rho$ ดังนั้น (V, Q) มีจุดตรึงร่วม $\rho = V\rho = Q\rho$

คาดว่า V และ Q มีจุดตรึงร่วมเพียงจุดเดียว $\rho, \rho^* \in \Omega$ ดังนั้น $V\rho = Q\rho = \rho, V\rho^* = Q\rho^* = \rho^*$ และ $d_\varphi(\rho, \rho^*) > 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \min\{d_\varphi(\rho, V\rho), d_\varphi(\rho^*, Q\rho^*)\} \\ &= \frac{1}{2} \min\{0, 0\} \\ &< d_\varphi(\rho, \rho^*) \end{aligned}$$

จาก (4.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\leq \eta(\alpha(\rho, V\rho)B(\rho, \rho^*), A(\rho, \rho^*)) \\ &< \psi(A(\rho, \rho^*)) - \psi(\alpha(\rho, V\rho)B(\rho, \rho^*)) \end{aligned}$$

เนื่องจาก ψ เป็นการเพิ่มอย่างเข้ม

$$d_\varphi(\rho, \rho^*) < \alpha(\rho, V\rho)B(\rho, \rho^*) < A(\rho, \rho^*) \quad (4.64)$$

เมื่อ

$$B(\rho, \rho^*) = \beta(\rho^*, Q\rho^*)d_\varphi(V\rho, Q\rho^*)$$

และ

$$\begin{aligned} A(\rho, \rho^*) &= \max \left\{ d_\varphi(\rho, \rho^*), d_\varphi(\rho, V\rho), d_\varphi(\rho^*, Q\rho^*), \right. \\ &\quad \left. \frac{G(\rho, \rho^*) + H(\rho, \rho^*)}{1 + d_\varphi(\rho, V\rho) + d_\varphi(\rho^*, Q\rho^*)}, \frac{G(\rho, \rho^*) + H(\rho, \rho^*)}{1 + d_\varphi(\rho, Q\rho^*) + d_\varphi(\rho^*, V\rho)} \right\} \\ &\quad + L \min\{d_\varphi(\rho, V\rho), d_\varphi(\rho^*, Q\rho^*), d_\varphi(\rho, Q\rho^*), d_\varphi(\rho^*, V\rho)\} \end{aligned} \quad (4.65)$$

ซึ่ง

$$G(\rho, \rho^*) = d_\varphi(\rho, V\rho)d_\varphi(\rho, Q\rho^*) \quad (4.66)$$

และ

$$H(\rho, \rho^*) = d_\varphi(\rho^*, Q\rho^*)d_\varphi(\rho^*, V\rho) \quad (4.67)$$

จาก (4.65), (4.66) และ (4.67) จะได้ว่า

$$A(\rho, \rho^*) = d_\varphi(\rho, \rho^*) > 0 \quad (4.68)$$

จาก (4.64) และ (4.68) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d_\varphi(\rho, \rho^*) &< \alpha(\rho, V\rho)\beta(\rho^*, Q\rho^*)d_\varphi(\rho, \rho^*) \\ &< A(\rho, \rho^*) \\ &= d_\varphi(\rho, \rho^*) \end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น V และ Q มีจุดตรึงร่วมเพียงจุดเดียว

ตัวอย่างที่ 4.1 Let $\Omega = [0, 1]$ ให้ $d_\varphi(\kappa, \varpi) = \frac{1}{5}(\kappa - \varpi)^2$ และ $\varphi(\kappa, \varpi) = 4^{(\kappa+\varpi)^2}$ บน $\Omega \times \Omega$ สำหรับทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ แล้ว (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยายบริบูรณ์ และการส่ง $V, Q : \Omega \rightarrow \Omega$ โดย $V\kappa = \frac{\kappa}{2^4}$ และ $Q(\kappa) = \kappa$ ให้ $\psi(t) = \frac{5}{2}t$ เมื่อ $t \in [0, +\infty)$ และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ ซึ่ง $\alpha(\kappa, V\kappa) = \beta(\kappa, Q\kappa) = 1$ แล้วจะได้ว่าสอดคล้องกับทฤษฎี 4.2 และมีจุดตรึงร่วม คือ $\kappa = 0$