บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลการวิจัย

บทนิยาม 4.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $\varphi : \Omega \times \Omega \longrightarrow [1, +\infty)$ และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ ให้ V และ Q เป็นการส่งบน Ω จะกล่าวว่า (V, Q) เป็นการส่งแบบซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ทั่วไป ถ้าทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(V\kappa, V\varpi)\} \quad \text{ทำให้ได้ว่า}\\ &\eta(\alpha(Q\kappa, Q\varpi)B(\kappa, \varpi), A(\kappa, \varpi)) \geq 0\end{aligned} \tag{4.1}$$

เมื่อ $\eta \in \mathbb{Z}_\psi$

$$B(\kappa, \varpi) = \beta(Q\kappa, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

และ

$$\begin{aligned}A(\kappa, \varpi) = \max\Big\{&d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, V\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi),\\ &\frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(Q\kappa, V\kappa) + d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(V\kappa, V\varpi) + d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)}\Big\}\\ &+ L\min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)\}\end{aligned}$$

ด้วย

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\kappa)d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยายบริบูรณ์ และการส่ง $V, Q : \Omega \longrightarrow \Omega$ เป็นการส่งแบบคู่ที่เข้ากันได้ ซึ่ง $V(\Omega) \subseteq Q(\Omega)$ ให้ (V, Q) เป็นการส่งแบบซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ทั่วไป และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) V เป็นการส่งแบบ α-แอดมิซซิเบิล ที่ขึ้นอยู่กับการส่ง Q

(2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(Qx_0, Vx_0) \geq 1$

(3) ถ้า $\{Q\kappa_n\}$ เป็นลำดับใน Ω ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก n และ $Q\kappa_n \longrightarrow Qz \in Q(\Omega)$ as $n \longrightarrow +\infty$ แล้วมีลำดับย่อย $\{Q\kappa_{n(k)}\}$ ของ $\{Q\kappa_n\}$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_{n(i)}, Qz) \geq 1$ สำหรับทุก k

(4) $Q(\Omega)$ เป็นเซตปิด

แล้ว V และ Q มีจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันเพียงจุดเดียวใน Ω

พิสูจน์ จากเงื่อนไขที่ (2) ให้ $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ เนื่องจาก $V(\Omega) \subseteq Q(\Omega)$ สามารถเลือกจุด $\kappa_1 \in \Omega$ ซึ่ง $V\kappa_0 = Q\kappa_1$ ดำเนินการตามกระบวนการนี้ต่อไปโดยเลือกแล้ว $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots, \kappa_n$ เลือก κ_{n+1} ใน Ω ซึ่ง

$$V\kappa_n = Q\kappa_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

จากเงื่อนไขที่ (1) มี V เป็นการส่งแบบ α-แอดมิซซิเบิล ที่ขึ้นอยู่กับการส่ง Q จะได้ว่า

$$\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) = \alpha(Q\kappa_0, Q\kappa_1) \geq 1 \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \quad \alpha(V\kappa_0, V\kappa_1) = \alpha(Q\kappa_1, Q\kappa_2) \geq 1$$

ใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้

$$\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\beta(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

ถ้า $V\kappa_{n+1} = V\kappa_n$ สำหรับบาง n โดย (4.1) จะมี $Q\kappa_{n+1} = V\kappa_{n+1}$ ดังนั้น κ_{n+1} เป็นจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันของ V และ Q กรณีอื่น สมมุติให้ $d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) > 0$ สำหรับทุก n โดย (4.1), (4.3) และ (4.4) จะได้

$$\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(V\kappa_n, Q\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, Q\kappa_{n+1})\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1})\}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\eta(\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n, \kappa_{n+1}), A(\kappa_n, \kappa_{n+1})) \geq 0 \tag{4.5}$$

และ

$$\psi(A(\kappa_n, \kappa_{n+1})) - \psi(\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n, \kappa_{n+1})) > 0$$

ดังนั้น

$$\psi(A(\kappa_n, \kappa_{n+1})) > \psi(\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n, \kappa_{n+1}))$$

จากนิยามของ ψ จะได้

$$A(\kappa_n,\kappa_{n+1}) > \alpha(Q\kappa_n,Q\kappa_{n+1})B(\kappa_n,\kappa_{n+1}) \tag{4.6}$$

ซึ่ง

$$B(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = \beta(Q\kappa_n,Q\kappa_{n+1})d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n+1}) \tag{4.7}$$

และ

$$\begin{aligned} A(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = \max\Big\{ & d_\varphi(Q\kappa_n,Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(Q\kappa_n,V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1},Q\kappa_{n+1}), \\ & \frac{G(\kappa_n,\kappa_{n+1})+H(\kappa_n,\kappa_{n+1})}{1+d_\varphi(Q\kappa_n,V\kappa_n)+d_\varphi(V\kappa_{n+1},Q\kappa_{n+1})}, \frac{G(\kappa_n,\kappa_{n+1})+H(\kappa_n,\kappa_{n+1})}{1+d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n+1})+d_\varphi(Q\kappa_n,Q\kappa_{n+1})}\Big\} \\ & + L\min\{d_\varphi(V\kappa_n,Q\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1},Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(Q\kappa_n,Q\kappa_{n+1}), d_\varphi(V\kappa_n,Q\kappa_{n+1})\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

ด้วย

$$G(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n,Q\kappa_{n+1})d_\varphi(Q\kappa_n,Q\kappa_{n+1}) \tag{4.9}$$

และ

$$H(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n,Q\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n+1}) \tag{4.10}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = \max\Big\{ & d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1},V\kappa_n), \\ & \frac{G(\kappa_n,\kappa_{n+1})+H(\kappa_n,\kappa_{n+1})}{1+d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n)+d_\varphi(V\kappa_{n+1},V\kappa_n)}, \frac{G(\kappa_n,\kappa_{n+1})+H(\kappa_n,\kappa_{n+1})}{1+d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n+1})+d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n)}\Big\} \\ & + L\min\{d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n-1}), d_\varphi(V\kappa_{n+1},V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_n)\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

ด้วย

$$G(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n) = 0 \tag{4.12}$$

และ

$$H(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n-1})d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n+1}) \tag{4.13}$$

จาก (4.10), (4.11) และ (4.12) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A(\kappa_n,\kappa_{n+1}) = \max\Big\{ & d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1},V\kappa_n), \\ & \frac{G(\kappa_n,\kappa_{n+1})+H(\kappa_n,\kappa_{n+1})}{1+d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n)+d_\varphi(V\kappa_{n+1},V\kappa_n)}, \frac{d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n-1})d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n+1})}{1+d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n+1})+d_\varphi(V\kappa_{n-1},V\kappa_n)}\Big\} \\ & + L\min\{d_\varphi(V\kappa_n,V\kappa_{n-1}), d_\varphi(V\kappa_{n+1},V\kappa_n), 0\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

เนื่องจาก $d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) \leq 1 + d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) + d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)$ และจาก (4.13) จะได้

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \max\left\{d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n), d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)\right\} \tag{4.15}$$

ถ้า $A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)$ และ (4.6) จะได้ว่า

$$d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) < d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) \tag{4.16}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นสำหรับทุก $n \geq 1$ จะได้

$$A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) \tag{4.17}$$

จาก (4.6) จะได้

$$\alpha(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)\beta(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_{n+1}) < d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) \tag{4.18}$$

ดังนั้น

$$d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) < d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) \tag{4.19}$$

ลำดับ $\{d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม ดังนั้นมี $r \geq 0$ ซึ่ง

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) = r$$

จะพิสูจน์ว่า

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n) = 0 \tag{4.20}$$

ให้ $r > 0$ โดย (4.16) จะได้ว่า

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \alpha(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)\beta(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n) = r \tag{4.21}$$

เนื่องจาก $r > 0$ และให้ $\varpi_n = \alpha(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)\beta(V\kappa_{n-1}, V\kappa_n)d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)$ และ $\kappa_n = d_\varphi(V\kappa_{n+1}, V\kappa_n)$ ซึ่ง $\lim_{n \longrightarrow \infty} \varpi_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \kappa_n = r$ โดย (η_2) จะได้

$$\limsup_{n \to \infty} \eta(\varpi_n, \kappa_n) < 0$$

เนื่องจาก $\eta(\varpi_n, \kappa_n) \geq 0$ ดังนั้น

$$0 \leq \limsup_{n \to \infty} \eta(\varpi_n, \kappa_n) < 0$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $r = 0.$ จะได้ว่า $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคชีใน (Ω, d_φ)

$$\lim_{n,m \longrightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_n, V\kappa_m) = 0 \tag{4.22}$$

สมมุติให้ $\{\kappa_n\}$ ไม่เป็นลำดับโคชี แล้วจะมี $\epsilon > 0$ ลำดับย่อย $\kappa_{n(k)}$ และ $\kappa_{n(k)}$ of $\{\kappa_n\}$ ด้วย $n(k) > m(k) > k$ ซึ่ง k

$$d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) \geq \epsilon \tag{4.23}$$

และ $n(k)$ เป็นจำนวนที่เล็กที่สุด จาก (4.23) จะได้ว่า

$$d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) < \epsilon \tag{4.24}$$

โดยอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (4.22) จะได้

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) \\ &\leq d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{n(k)-1}) + d_\varphi(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)}) \\ &< d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{n(k)-1}) + \epsilon \end{aligned} \tag{4.25}$$

ให้ $n \longrightarrow \infty$ และประยุกต์ใช้ (4.20) จะได้ว่า

$$\epsilon \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) < \epsilon$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)}) = \epsilon \tag{4.26}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)+1}) = \epsilon \tag{4.27}$$

และ

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d_\varphi(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)}) = \epsilon \tag{4.28}$$

ใช้ (4.6) และ (η_2) จะได้

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \eta(\alpha(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)})\beta(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)})d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, V\kappa_{m(k)+1}), \\ &\quad d_\varphi(V\kappa_{n(k)-1}, V\kappa_{m(k)})) \\ &< 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคชี และ $\{V\kappa_n\} = \{Q\kappa_{n+1}\}$ เป็นลำดับโคชีใน Ω เนื่องจาก $Q(\Omega)$ เป็นเซตปิด มี $z \in \Omega$ ซึ่ง

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} Q\kappa_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} V\kappa_{n+1} = Qz \tag{4.30}$$

จะแสดงว่า z เป็นจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันของ V และ Q สมมุติให้ $d_\varphi(Vz, Qz) > 0$ ใช้เงื่อนไขที่ (3) และ (4.30) จะได้ $\alpha(Q\kappa_{n(k}, Qz) \geq 1$ สำหรับ k ดังนั้น

$$\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, Q\kappa_{n(k)}), d_\varphi(Vz, Qz)\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa_{n(k)}, Q\kappa_{n(k)}), d_\varphi(V\kappa_{n(k)}, Vz)\}$$

ให้ $k \longrightarrow \infty$ ในสมการข้างต้น

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(Vz, Qz), d_\varphi(Vz, Qz)\} &\leq \max\{d_\varphi(Qz, Qz), d_\varphi(Vz, Vz)\}\\ &= \max\{0, 0\}\\ &= 0\end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $d_\varphi(Vz, Qz) = 0$ นี่คือ $Vz = Qz$ ซึ่งได้แสดงว่า V และ Q มีจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกัน

ทฤษฎีบท 4.2 มีเงื่อนไขเช่นเดียวกันกับทฤษฎีบท 4.1 โดยมี $\rho, \sigma \in C(V, Q)$ ถ้า $\alpha(Q\rho, Q\sigma) \geq 1$ และ (V, Q) เป็นคู่ที่เข้ากันได้แบบอ่อน แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียว

พิสูจน์ จากการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\{Q\kappa_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดและลู่เข้าสู่ Qz และ $Vz = Qz$ เนื่องจาก V และ Q เป็นคู่ที่เข้ากันได้แบบอ่อน จะได้ว่า

$$Vz = VQz = QVz = Qz$$

ให้ $u = Vz = Qz$ ขะได้

$$u = Vu = Qu$$

ดังนั้น V และ Q มีจุดตรึงร่วมกัน ต่อไปจะพิสูจน์ว่ามีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียว โดยให้ u และ u' เป็นสองจุดตรึงร่วมกันของ V และ Q คือ

$$u = Vu = Qu \quad \text{and} \quad u' = Vu' = Qu'$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(Vu, Qu), d_\varphi(Vu', Qu')\} = 0\\ &\leq \max\{d_\varphi(Qu, Qu'), d_\varphi(Vu, Vu')\}\end{aligned} \tag{4.31}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\eta(\alpha(Qu, Qu')B(u, u'), A(u, u')) \geq 0 \tag{4.32}$$

และ

$$\psi(A(u, u')) - \psi(\alpha(Qu, Qu')B(u, u')) > 0 \tag{4.33}$$

ดังนั้น

$$\psi(A(u, u')) > \psi(\alpha(Qu, Qu')B(u, u')) \tag{4.34}$$

จากนิยามของ ψ จะได้ว่า

$$A(u, u') > \alpha(Qu, Qu')B(u, u') = \alpha(u, u')B(u, u') \tag{4.35}$$

ซึ่ง

$$B(u, u') = \beta(Qu, Qu')d_\varphi(Vu, Vu') = \beta(u, u')d_\varphi(u, u') \tag{4.36}$$

และ

$$\begin{aligned} A(u, u') = \max\Big\{ & d_\varphi(Qu, Qu'), d_\varphi(Qu, Vu), d_\varphi(Vu', Qu'), \\ & \frac{G(u, u') + H(u, u')}{1 + d_\varphi(Qu, Vu) + d_\varphi(Vu', Qu')}, \frac{G(u, u') + H(u, u')}{1 + d_\varphi(Vu, Vu') + d_\varphi(Qu, Qu')}\Big\} \\ & + L\min\{d_\varphi(Vu, Qu), d_\varphi(Vu', Qu'), d_\varphi(Qu, Qu'), d_\varphi(Vu, Qu')\} \end{aligned} \tag{4.37}$$

ด้วย

$$G(u, u') = d_\varphi(Vu, Qu')d_\varphi(Qu, Qu') \tag{4.38}$$

และ

$$H(u, u') = d_\varphi(Vu, Qu)d_\varphi(Vu, Vu') = 0 \tag{4.39}$$

จาก (4.37), (4.38) และ (4.39) จะได้ว่า

$$A(u, u') = d_\varphi(u, u') \tag{4.40}$$

จาก (4.35), (4.36) และ (4.40) จะได้

$$\alpha(u, u')\beta(u, u')d_\varphi(u, u') < d_\varphi(u, u') \tag{4.41}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น V และ Q มีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียวใน Ω

บทนิยาม 4.2 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $V, Q : \Omega \to \Omega$ จะเรียก (V, Q) เป็นซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ถ้าสำหรับทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi)\} \leq d_\varphi(\kappa, \varpi) \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \\ &\eta(\alpha(\kappa, V\kappa)B(\kappa, \varpi), A(\kappa, \varpi)) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.42}$$

เมื่อ $\eta \in \mathbb{Z}_\psi$

$$A(\kappa, \varpi) = \beta(\varpi, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$\begin{aligned} A(\kappa, \varpi) = \max\Big\{&d_\varphi(\kappa, \varpi), d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), \\ &\frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\kappa) + d_\varphi(\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\varpi) + d_\varphi(\varpi, V\kappa)}\Big\} \\ &+ L\min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), d_\varphi(\kappa, Q\varpi), d_\varphi(\varpi, V\kappa)\} \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\kappa, V\kappa)d_\varphi(\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\varpi, Q\varpi)d_\varphi(\varpi, V\kappa)$$

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยายบริบูรณ์ และ $V, Q : \Omega \to \Omega$ เป็นการส่ง และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) (V, Q) เป็นการส่ง (α, β)-แอดมิซซิเบิล

(2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_0, Q\kappa_0) \geq 1$

(3) (V, Q) เป็นซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$

(4) V และ Q ต่อเนื่อง หรือ ทุกลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω ซึ่ง $\alpha(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\kappa_n \to \rho$ จะได้ว่า $\alpha(\kappa, V\kappa) \geq 1$ และ $\beta(\kappa, Q\kappa) \geq 1$

แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมใน Ω

พิสูจน์ โดยเงื่อนไข (2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ ให้ลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω และ $\kappa_1 \in \Omega$ ซึ่ง

$$\kappa_1 = V\kappa_0,\ \kappa_2 = Q\kappa_1,\ \kappa_3 = V\kappa_2,\ \kappa_4 = Q\kappa_3$$

จะได้ว่า

$$V\kappa_n = \kappa_{n+1} \quad \text{และ} \quad Q\kappa_{n+1} = \kappa_{n+2}$$

จาก (V, Q) เป็น (α, β)-แอดมิซซิเบิล จะได้

$$\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) = \alpha(\kappa_0, \kappa_1) \geq 1,$$
$$\alpha(V\kappa_0, Q\kappa_1) = \alpha(\kappa_1, \kappa_2) \geq 1,$$
$$\alpha(Q\kappa_1, V\kappa_2) = \alpha(\kappa_2, \kappa_3) \geq 1$$

และ

$$\alpha(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1, \quad \forall n \geq 0$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\beta(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1, \quad \forall n \geq 0$$

ถ้า $\kappa_n = \kappa_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $\rho = \kappa_n$ มีจุดตรึงร่วมของ V หรือ Q สมมุติว่า $\kappa_n \neq \kappa_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก

$$\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})\} \leq d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})$$

จาก (4.1) จะได้

$$\eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) \geq 0$$

และ

$$\psi(A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) - \psi(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) > 0$$

ดังนั้น

$$\psi(A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) > \psi(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})$$

จากนิยามของ ψ จะได้ว่า

$$A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) > \alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) \tag{4.43}$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = \beta(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})) \tag{4.44}$$

และ

$$
\begin{aligned}
A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = \max \Big\{ & d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), \\
& \frac{G(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + H(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})}, \\
& \frac{G(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + H(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}) + d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+1})} \Big\} \\
& + L \min\{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), \\
& d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+1}) \}
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

ซึ่ง

$$G(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}) \tag{4.46}$$

และ

$$H(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+1}) \tag{4.47}$$

จาก (4.45), (4.46) และ (4.47) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) &= \max \Big\{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), \\
& \quad \frac{d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) + d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})}, \frac{d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2})} \Big\} \\
& \quad + L \min\{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}), d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+2}), 0 \} \\
&= \max \Big\{ d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) \Big\}
\end{aligned}
$$

ถ้า $A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})$ และโดย (4.43) จะได้ว่า

$$d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) < d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2})$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น

$$A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) \tag{4.48}$$

โดย (4.43) จะได้

$$d_\varphi(\kappa_{2n+1}, \kappa_{2n+2}) < d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})$$

สรุปได้ว่า $\{d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1})\}$ ไม่ลบและไม่ลด ดังนั้นมี $r \geq 0$ ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = r$$

เห็นชัด ถ้า $r = 0$ สมมุติว่า $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = r \tag{4.49}$$

สำหรับทุก $n \geq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n}), d_\varphi(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})\} \leq d_\varphi(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})$$

จาก (4.1) จะได้ว่า

$$\eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) \geq 0$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}) = \beta(\kappa_{2n+1}, Q\kappa_{2n+1})d_\varphi(V\kappa_{2n}, Q\kappa_{2n+1})$$

และ

$$\limsup_{n\to\infty} \eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1}), A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) \geq 0$$

โดยเงื่อนไข (η_2) ของบทนิยาม 2.4 จะได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty} \eta(\alpha(\kappa_{2n}, V\kappa_{2n})B(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})A(\kappa_{2n}, \kappa_{2n+1})) < 0$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} d_\varphi(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} A(\kappa_n, \kappa_{n+1}) = 0 \tag{4.50}$$

จะแสดงว่า $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคชี สมมุติว่า $\{\kappa_n\}$ ไม่เป็นลำดับโคชี แล้วมี $\varepsilon_0 > 0$ และลำดับเพิ่มทางเดียวของจำนวนธรรมชาติ $\{m_k\}$ และ $\{n_k\}$ ซึ่ง $n_k > m_k$ และ $d_\varphi(\kappa_{2m_k}, \kappa_{2n_k}) \geq 0$ และ

(i) $\lim_{n\to\infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k}, \kappa_{2n_k}) = \varepsilon_0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1}) = \varepsilon_0$

(iii) $\lim_{n\to\infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k}, \kappa_{2n_k+1}) = \varepsilon_0$

(iv) $\lim_{n\to\infty} d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k}) = \varepsilon_0$

จากนิยามของ $A(\kappa, \varpi)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} A(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\max\Big\{ d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}), d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k}), \\
&\frac{G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) + H(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1})}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}) + d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k})}, \frac{G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) + H(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}))}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k}) + d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1})} \Big\} \\
&+ L \min\{ d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}), d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k}), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k}), d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1}) \} \Big)
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

ซึ่ง

$$
G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) = d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}) d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k}) \tag{4.52}
$$

และ

$$
H(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) = d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2m_k}) d_\varphi(\kappa_{2m_k-1}, \kappa_{2n_k+1}) \tag{4.53}
$$

จาก (4.51), (4.52) และ (4.53) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) &= \max\{\varepsilon_0, 0, 0, 0, 0\} + L \min\{0, 0, \varepsilon_0, \varepsilon_0\} \\
&= \varepsilon_0
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}) &= \lim_{k\to\infty} G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) \\
&= \varepsilon_0 > 0
\end{aligned}
$$

โดยเงื่อนไข (η_2) ของบทนิยาม 2.4 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k+1}) &= \lim_{k\to\infty} G(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1}) \\
&= \varepsilon_0 > 0
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

ตรงกันข้าม ยืนยันว่ามีขนาดใหญ่เพียงพอ $k \in \mathbb{N}$ ถ้า $n_k > m_k > k$ แล้ว

$$
\frac{1}{2} \min\{ d_\varphi(\kappa_{n_k}, V\kappa_{n_k}), d_\varphi(\kappa_{m_k-1}, Q\kappa_{m_k-1}) \} > d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{m_k-1}) \tag{4.56}
$$

เมื่อ $k \to \infty$ ใน (4.56) จะได้ว่า $\varepsilon_0 \leq 0$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น

$$
\frac{1}{2} \min\{ d_\varphi(\kappa_{n_k}, V\kappa_{n_k}), d_\varphi(\kappa_{m_k-1}, Q\kappa_{m_k-1}) \} \leq d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{m_k-1})
$$

จาก (4.1) จะได้ว่า

$$
\eta(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}) B(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k-1}), A(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1})) \geq 0
$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k-1}) = \beta(\kappa_{2m_k-1}, Q\kappa_{2m_k-1})d_\varphi(V\kappa_{2n_k}, Q\kappa_{2m_k-1})$$

ดังนั้น

$$\limsup_{n\to\infty} \eta(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2n_k-1}), A(\kappa_{2n_k}, \kappa_{2m_k-1})) \geq 0 \tag{4.57}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง (4.55) ทำให้ได้ว่า $\{\kappa_n\}$ เป็นลำดับโคชี และเนื่องจาก Ω บริบูรณ์ มี $\rho \in \Omega$ ซึ่ง $\{\kappa_n\} \to \rho$ ที่ $n \to \infty$ จะได้ ρ เป็นจุดตรึงของ V และ Q เพราะ V และ Q ต่อเนื่อง สามารถสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \kappa_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} V\kappa_{2n}\\ &= V\left(\lim_{n\to\infty} \kappa_{2n}\right) = V\rho\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \kappa_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} Q\kappa_{2n+1}\\ &= Q\left(\lim_{n\to\infty} \kappa_{2n+1}\right) = Q\rho\end{aligned}$$

ดังนั้น $V\rho = Q\rho = \rho$ นั่นคือ ρ เป็นจุดตรึงร่วมของ V และ Q จาก (iv) จะได้ว่าทุกลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω ซึ่ง $\alpha(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $\kappa_n \to \rho$ ที่ $n \to \infty$ ทำให้ได้ว่า $\kappa_{2n_k+1} \to \rho$ และ $\kappa_{2n_k+2} \to \rho$ ที่ $k \to \infty$ จะแสดงว่า $V\rho = Q\rho = \rho$ โดยสมมุติว่า $\rho \neq Q\rho$ สำหรับทุก $n \geq 1$ มีอย่างน้อยหนึ่งข้อต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) \leq d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \rho)$$

หรือ

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{n_k+1}) \leq d_\varphi(\kappa_{n_k}, \rho)$$

สมมุติว่า

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) > d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \rho)$$

และ

$$\frac{1}{2}d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{n_k+1}) > d_\varphi(\kappa_{n_k}, \rho)$$

สำหรับบาง $n \geq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) &\leq d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \rho) + d_\varphi(\rho, \kappa_{n_k})\\ &< \frac{1}{2}[d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k}) + d_\varphi(\kappa_{n_k}, \kappa_{n_k+1})]\\ &\leq d_\varphi(\kappa_{n_k-1}, \kappa_{n_k})\end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง และสิ่งที่คาดไว้เป็นจริง จาก (4.1) จะได้

$$\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}), d_\varphi(\rho, Q\rho)\} \le d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \rho)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &\le \eta(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho), A(\kappa_{2n_k}, \rho)) \\ &< \psi(A(\kappa_{2n_k}, \rho)) - \psi(\alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho)) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\psi(A(\kappa_{2k}, \rho)) > \psi(\alpha(\kappa_{2k}, V\kappa_{2k})B(\kappa_{2n_k}, \rho))$$

เนื่องจาก ψ เป็นการเพิ่มอย่างเข้มจะได้ว่า

$$A(\kappa_{2n_k}, \rho) > \alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho) \tag{4.58}$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n_k}, \rho) = \beta(\rho, Q\rho)d_\varphi(V\kappa_{2n_k}, Q\rho) \tag{4.59}$$

และ

$$\begin{aligned} A(\kappa_{2n_k}, \rho) = \max\Big\{ & d_\varphi(\kappa_{2n_k}, \rho), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}), d_\varphi(\rho, Q\rho), \\ & \frac{G(\kappa_{2n_k}, \rho) + H(\kappa_{2n_k}, \rho)}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}) + d_\varphi(\rho, Q\rho)}, \frac{G(\kappa_{2n_k}, \rho) + H(\kappa_{2n_k}, \rho)}{1 + d_\varphi(\kappa_{2n_k}, Q\rho) + d_\varphi(\rho, V\kappa_{2n_k})}\Big\} \\ & + L\min\{d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k}), d_\varphi(\rho, Q\rho), d_\varphi(\kappa_{2n_k}, Q\rho), d_\varphi(\rho, V\kappa_{2n_k})\} \end{aligned} \tag{4.60}$$

ซึ่ง

$$G(\kappa_{2n_k}, \rho) = d_\varphi(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})d_\varphi(\kappa_{2n_k}, Q\rho) \tag{4.61}$$

และ

$$H(\kappa_{2n_k}, \rho) = d_\varphi(\rho, Q\rho)d_\varphi(\rho, V\kappa_{2n_k}) \tag{4.62}$$

ให้ $k \to \infty$ ใน (4.60) จะได้ว่า

$$\lim_{k\to\infty} A(\kappa_{2k}, \rho) = d_\varphi(\rho, H\rho)$$

จาก (4.58) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & d_\varphi(V\kappa_{2n_k}, Q\rho) \\ & \le \alpha(\kappa_{2n_k}, V\kappa_{2n_k})B(\kappa_{2n_k}, \rho) \\ & < A(\kappa_{2n_k}, \rho) \end{aligned} \tag{4.63}$$

เมื่อ

$$B(\kappa_{2n_k},\rho)=\beta(\rho,Q\rho)d_\varphi(V\kappa_{2n_k},Q\rho)$$

ให้ $k\to\infty$ ใน (4.63) จะได้ว่า

$$d_\varphi(\rho,Q\rho)<d_\varphi(\rho,Q\rho)$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\rho=Q\rho$ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\rho=V\rho$ ดังนั้น (V,Q) มีจุดตรึงร่วม $\rho=V\rho=Q\rho$

คาดว่า V และ Q มีจุดตรึงร่วมเพียงจุดเดียว $\rho,\rho^*\in\Omega$ ดังนั้น $V\rho=Q\rho=\rho, V\rho^*=Q\rho^*=\rho^*$ และ $d_\varphi(\rho,\rho^*)>0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(\rho,V\rho),d_\varphi(\rho^*,Q\rho^*)\}\\&=\frac{1}{2}\min\{0,0\}\\&<d_\varphi(\rho,\rho^*)\end{aligned}$$

จาก (4.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}0&\le\eta(\alpha(\rho,V\rho)B(\rho,\rho^*),A(\rho,\rho^*))\\&<\psi(A(\rho,\rho^*))-\psi(\alpha(\rho,V\rho)B(\rho,\rho^*))\end{aligned}$$

เนื่องจาก ψ เป็นการเพิ่มอย่างเข้ม

$$d_\varphi(\rho,\rho^*)<\alpha(\rho,V\rho)B(\rho,\rho^*)<A(\rho,\rho^*)\tag{4.64}$$

เมื่อ

$$B(\rho,\rho^*)=\beta(\rho^*,Q\rho^*)d_\varphi(V\rho,Q\rho^*)$$

และ

$$\begin{aligned}A(\rho,\rho^*)=\max\Big\{&d_\varphi(\rho,\rho^*),d_\varphi(\rho,V\rho),d_\varphi(\rho^*,Q\rho^*),\\&\frac{G(\rho,\rho^*)+H(\rho,\rho^*)}{1+d_\varphi(\rho,V\rho)+d_\varphi(\rho^*,Q\rho^*)},\frac{G(\rho,\rho^*)+H(\rho,\rho^*)}{1+d_\varphi(\rho,Q\rho^*)+d_\varphi(\rho^*,V\rho)}\Big\}\\&+L\min\{d_\varphi(\rho,V\rho^*),d_\varphi(\rho^*,Q\rho^*),d_\varphi(\rho,Q\rho^*),d_\varphi(\rho^*,V\rho)\}\end{aligned}\tag{4.65}$$

ซึ่ง

$$G(\rho,\rho^*)=d_\varphi(\rho,V\rho)d_\varphi(\rho,Q\rho^*)\tag{4.66}$$

และ

$$H(\rho,\rho^*)=d_\varphi(\rho^*,Q\rho^*)d_\varphi(\rho^*,V\rho)\tag{4.67}$$

จาก (4.65), (4.66) และ (4.67) จะได้ว่า

$$A(\rho, \rho^*) = d_\varphi(\rho, \rho^*) > 0 \tag{4.68}$$

จาก (4.64) และ (4.68) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d_\varphi(\rho, \rho^*) &< \alpha(\rho, V\rho)\beta(\rho^*, Q\rho^*)d_\varphi(\rho, \rho^*) \\ &< A(\rho, \rho^*) \\ &= d_\varphi(\rho, \rho^*) \end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น V และ Q มีจุดตรึงร่วมเพียงจุดเดียว

ตัวอย่างที่ 4.1 Let $\Omega = [0, 1]$ ให้ $d_\varphi(\kappa, \varpi) = \dfrac{1}{5}(\kappa - \varpi)^2$ และ $\varphi(\kappa, \varpi) = 4^{(\kappa+\varpi)^2}$ บน $\Omega \times \Omega$ สำหรับทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ แล้ว (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยายบริบูรณ์ และการส่ง $V, Q : \Omega \longrightarrow \Omega$ โดย $V\kappa = \dfrac{\kappa}{2^4}$ และ $Q(\kappa) = \kappa$ ให้ $\psi(t) = \dfrac{5}{2}t$ เมื่อ $t \in [0, +\infty)$ และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ ซึ่ง $\alpha(\kappa, V\kappa) = \beta(\kappa, Q\kappa) = 1$ แล้วจะได้ว่าสอดคล้องกับทฤษฎี 4.2 และมีจุดตรึงร่วม คือ $\kappa = 0$

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

ผลจากการวิจัยนี้ได้บรรลุวัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยโดยได้บทนิยามและทฤษฎีบทดังนี้

บทนิยาม 5.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $\varphi : \Omega \times \Omega \longrightarrow [1, +\infty)$ และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ ให้ V และ Q เป็นการส่งบน Ω จะกล่าวว่า (V, Q) เป็นการส่งแบบซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ทั่วไป ถ้าทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(V\kappa, V\varpi)\} \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \\ &\eta(\alpha(Q\kappa, Q\varpi)B(\kappa, \varpi), A(\kappa, \varpi)) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

เมื่อ $\eta \in \mathbb{Z}_\psi$

$$B(\kappa, \varpi) = \beta(Q\kappa, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

และ

$$\begin{aligned} A(\kappa, \varpi) = \max\Big\{&d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, V\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi), \\ &\frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(Q\kappa, V\kappa) + d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(V\kappa, V\varpi) + d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)}\Big\} \\ &+ L\min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)\} \end{aligned}$$

ด้วย

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\kappa)d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

บทนิยาม 5.2 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $V, Q : \Omega \to \Omega$ จะเรียก (V, Q) เป็นซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ถ้าสำหรับทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi)\} \leq d_\varphi(\kappa, \varpi) \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \\ &\eta(\alpha(\kappa, V\kappa)A(\kappa, \varpi), B(\kappa, \varpi)) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

เมื่อ $\eta \in \mathbb{Z}_\psi$

$$A(\kappa, \varpi) = \beta(\varpi, Q\varpi) d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$\begin{aligned} B(\kappa, \varpi) = \max\Big\{ & d_\varphi(\kappa, \varpi), d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), \\ & \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\kappa) + d_\varphi(\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\varpi) + d_\varphi(\varpi, V\kappa)} \Big\} \\ & + L \min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), d_\varphi(\kappa, Q\varpi), d_\varphi(\varpi, V\kappa)\} \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\kappa, V\kappa) d_\varphi(\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\varpi, Q\varpi) d_\varphi(\varpi, V\kappa)$$

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $V, Q : \Omega \longrightarrow \Omega$ เป็นการส่งแบบคู่ที่เข้ากันได้ ซึ่ง $V(\Omega) \subseteq Q(\Omega)$ ให้ (V, Q) เป็นการส่งแบบซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ทั่วไป และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) V เป็นการส่งแบบ α-แอดมิซซิเบิล ที่ขึ้นอยู่กับการส่ง Q

(2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(Qx_0, Vx_0) \geq 1$

(3) ถ้า $\{Q\kappa_n\}$ เป็นลำดับใน Ω ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก n และ $Q\kappa_n \longrightarrow Qz \in Q(\Omega)$ as $n \longrightarrow +\infty$ แล้วมีลำดับย่อย $\{Q\kappa_{n(k)}\}$ ของ $\{Q\kappa_n\}$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_{n(i)}, Qz) \geq 1$ สำหรับทุก k

(4) $Q(\Omega)$ เป็นเซตปิด

แล้ว V และ Q มีจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันเพียงจุดเดียวใน Ω

ทฤษฎีบท 5.2 มีเงื่อนไขเช่นเดียวกันกับทฤษฎีบท 5.1 โดยมี $\rho, \sigma \in C(V, Q)$ ถ้า $\alpha(Q\rho, Q\sigma) \geq 1$ และ (V, Q) เป็นคู่ที่เข้ากันได้แบบอ่อน แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียว

ทฤษฎีบท 5.3 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย และ $V, Q : \Omega \rightarrow \Omega$ เป็นการส่ง และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) (V, Q) เป็นการส่ง (α, β)-แอดมิซซิเบิล

(2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_0, Q\kappa_0) \geq 1$

(3) (V,Q) เป็นซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$

(4) V และ Q ต่อเนื่อง หรือ ทุกลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω ซึ่ง $\alpha(\kappa_n,\kappa_{n+1}) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_n,\kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\kappa_n \to \rho$ จะได้ว่า $\alpha(\kappa, V\kappa) \geq 1$ และ $\beta(\kappa, Q\kappa) \geq 1$

แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมใน Ω

อภิปรายผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากโครงการนี้นับได้ว่าเป็นองค์ความรู้ใหม่ทางทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการเกิดขึ้นพร้อมกันของคำตอบของสองการส่งและการวิเคราะห์จุดตรึง โดยทฤษฎีบทที่ได้จากโครงการนี้เป็นทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหากับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ ที่ได้ผลลัพธ์ทั่วไปและยืดหยุ่นกว่าทฤษฎีบทเดิมที่มีอยู่ และมีความเกี่ยวข้องได้ ทั้งนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านการพิสูจน์การมีอยู่จริงของคำตอบว่ามีเงื่อนไขเพียงพอต่อการได้คำตอบหรือไม่ อาทิเช่น ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์ ปัญหาสมการเมทริกซ์ และปัญหาการหาคำตอบของระบบสมการไม่เชิงเส้น เป็นต้น

ข้อเสนอแนะ

ผลลัพธ์ที่ได้จากโครงการนี้นับได้ว่าเป็นองค์ความรู้ใหม่ทางทฤษฎีเกี่ยวกับการมีเงื่อนไขเพียงพอต่อการได้คำตอบหรือไม่ ซึ่งสามารถนำไปวิจัยต่อยอดในเรื่องการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น และระบบสมการไม่เชิงเส้น

บรรณานุกรม

Asim, M., Mdad, M. I. & Adenovic, S. R. (2019). Fixed point results in extended rectangular b-metric space with an application. **UPB Sci. Bull. Ser. A**, 81, 11-20.

Bakhtin, I. A. (1989). The contraction mapping principle in almost metric spaces. **Funct. Anal.**, Gos. Ped. Inst. Unianowsk 30, 26-37

Branciari, A. (2000). A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. **Publ. Math.**, 1, 31-37.

George, R. et al. (2015). Rectangular b-metric space and contraction principles. **J. Nonlinear Sci. Appl.**, 6, 1005-1013.

Joonaghany, G. H. et al. (2019). A new common fixed point theorem for Suzuki type contractions via generalized Ψ-simulation functions. **Sahand Communications in Mathematical Analysis**, 16 (1), 129-148.

Kamran, T., Samreen, M. & Ain, O. U. (2017). A generalization of b-metric space and some fixed point theorems. **Mathematics**, 5, 19.

Mlaiki, N., Hajji, M. & Abdeljawad, T. (2020). A new extension of the rectangular b-metric spaces. **Advances in Mathematical Physics**, Article ID 8319584, 7 pages

Olgun, M., Bicer, O. & Alyildiz, T. (2016). A new aspect to Picard operators with simulation functions. **Turk. J. Math.**, 40, 832-837.

Singh, S. L., Kamal, R. De La Sen, M. & Chugh, R. (2015). A fixed point theorem for generalized weak contractions. **Filomat**, 29, 1481-1490.

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ-สกุล นายไพรวรรณ วงษ์สาสิลไชย

ประวัติการศึกษา

วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาราชภัฏอุดรธานี พ.ศ. 2549

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) มหาวิทยาลัยขอนแก่น พ.ศ. 2553

ตำแหน่งและสถานที่ทำงานปัจจุบัน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สังกัดภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ชื่อ-สกุล นายพีรเชษฐ์ บุญพัชรเจริญ

ประวัติการศึกษา

วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ พ.ศ. 2546

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยบูรพา พ.ศ. 2549

ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยบูรพา พ.ศ. 2558

ตำแหน่งและสถานที่ทำงานปัจจุบัน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สังกัดภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ชื่อ-สกุล นายอนันตชัย แปดเจริญ

ประวัติการศึกษา

วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยบูรพา พ.ศ. 2551

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยบูรพา พ.ศ. 2553

ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี พ.ศ. 2562

ตำแหน่งและสถานที่ทำงานปัจจุบัน

อาจารย์ สังกัดภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏรำไพพรรณี

ทุนการศึกษา

ทุนเพชรพระจอมเกล้าดุษฎีบัณฑิต 2558-2561

รางวัล

The high JCR impact factor award from the Professor Dr.Tab Nilanidhi Foundation 2019