บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

ผลจากการวิจัยนี้ได้บรรลุวัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยโดยได้บทนิยามและทฤษฎีบทดังนี้

บทนิยาม 5.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $\varphi : \Omega \times \Omega \longrightarrow [1, +\infty)$ และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$ ให้ V และ Q เป็นการส่งบน Ω จะกล่าวว่า (V, Q) เป็นการส่งแบบซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ทั่วไป ถ้าทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)\} \leq \max\{d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(V\kappa, V\varpi)\} \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \\
&\eta(\alpha(Q\kappa, Q\varpi)B(\kappa, \varpi), A(\kappa, \varpi)) \geq 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

เมื่อ $\eta \in \mathbb{Z}_\psi$

$$B(\kappa, \varpi) = \beta(Q\kappa, Q\varpi) d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

และ

$$\begin{aligned}
A(\kappa, \varpi) = \max\Big\{&d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, V\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi), \\
&\frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(Q\kappa, V\kappa) + d_\varphi(V\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(V\kappa, V\varpi) + d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)}\Big\} \\
&+ L\min\{d_\varphi(V\kappa, Q\kappa), d_\varphi(V\varpi, Q\varpi), d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi) d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)\}
\end{aligned}$$

ด้วย

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\varpi) d_\varphi(Q\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(V\kappa, Q\kappa) d_\varphi(V\kappa, V\varpi)$$

บทนิยาม 5.2 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $V, Q : \Omega \to \Omega$ จะเรียก (V, Q) เป็นซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ถ้าสำหรับทุก $\kappa, \varpi \in \Omega$ และ $L \geq 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi)\} \leq d_\varphi(\kappa, \varpi) \quad \text{ทำให้ได้ว่า} \\
&\eta(\alpha(\kappa, V\kappa)A(\kappa, \varpi), B(\kappa, \varpi)) \geq 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

เมื่อ $\eta \in \mathbb{Z}_\psi$

$$A(\kappa, \varpi) = \beta(\varpi, Q\varpi) d_\varphi(V\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$\begin{aligned} B(\kappa, \varpi) = \max \Big\{ & d_\varphi(\kappa, \varpi), d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), \\ & \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\kappa) + d_\varphi(\varpi, Q\varpi)}, \frac{G(\kappa, \varpi) + H(\kappa, \varpi)}{1 + d_\varphi(\kappa, V\varpi) + d_\varphi(\varpi, V\kappa)} \Big\} \\ & + L \min\{d_\varphi(\kappa, V\kappa), d_\varphi(\varpi, Q\varpi), d_\varphi(\kappa, Q\varpi), d_\varphi(\varpi, V\kappa)\} \end{aligned}$$

ซึ่ง

$$G(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\kappa, V\kappa) d_\varphi(\kappa, Q\varpi)$$

และ

$$H(\kappa, \varpi) = d_\varphi(\varpi, Q\varpi) d_\varphi(\varpi, V\kappa)$$

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย การส่ง $V, Q : \Omega \longrightarrow \Omega$ เป็นการส่งแบบคู่ที่เข้ากันได้ ซึ่ง $V(\Omega) \subseteq Q(\Omega)$ ให้ (V, Q) เป็นการส่งแบบซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$ ทั่วไป และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) V เป็นการส่งแบบ α-แอดมิซซิเบิล ที่ขึ้นอยู่กับการส่ง Q

(2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(Qx_0, Vx_0) \geq 1$

(3) ถ้า $\{Q\kappa_n\}$ เป็นลำดับใน Ω ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_n, Q\kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับทุก n และ $Q\kappa_n \longrightarrow Qz \in Q(\Omega)$ as $n \longrightarrow +\infty$ แล้วมีลำดับย่อย $\{Q\kappa_{n(k)}\}$ ของ $\{Q\kappa_n\}$ ซึ่ง $\alpha(Q\kappa_{n(i)}, Qz) \geq 1$ สำหรับทุก k

(4) $Q(\Omega)$ เป็นเซตปิด

แล้ว V และ Q มีจุดที่เกิดขึ้นพร้อมกันเพียงจุดเดียวใน Ω

ทฤษฎีบท 5.2 มีเงื่อนไขเช่นเดียวกันกับทฤษฎีบท 5.1 โดยมี $\rho, \sigma \in C(V, Q)$ ถ้า $\alpha(Q\rho, Q\sigma) \geq 1$ และ (V, Q) เป็นคู่ที่เข้ากันได้แบบอ่อน แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมกันเพียงจุดเดียว

ทฤษฎีบท 5.3 ให้ (Ω, d_φ) เป็นปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย และ $V, Q : \Omega \to \Omega$ เป็นการส่ง และ $\alpha, \beta : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) (V, Q) เป็นการส่ง (α, β)-แอดมิซซิเบิล

(2) มี $\kappa_0 \in \Omega$ ซึ่ง $\alpha(\kappa_0, V\kappa_0) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_0, Q\kappa_0) \geq 1$

(3) (V, Q) เป็นซูซูกิ $\mathbb{Z}_{(\alpha,\beta)}$

(4) V และ Q ต่อเนื่อง หรือ ทุกลำดับ $\{\kappa_n\}$ ใน Ω ซึ่ง $\alpha(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ และ $\beta(\kappa_n, \kappa_{n+1}) \geq 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\kappa_n \to \rho$ จะได้ว่า $\alpha(\kappa, V\kappa) \geq 1$ และ $\beta(\kappa, Q\kappa) \geq 1$

แล้ว V และ Q มีจุดตรึงร่วมใน Ω

อภิปรายผล

ผลลัพธ์ที่ได้จากโครงการนี้นับได้ว่าเป็นองค์ความรู้ใหม่ทางทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการเกิดขึ้นพร้อมกันของคำตอบของสองการส่งและการวิเคราะห์จุดตรึง โดยทฤษฎีบทที่ได้จากโครงการนี้เป็นทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิเมตริกแบบบีอิงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขยาย ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหากับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ใหม่ ๆ ที่ได้ผลลัพธ์ทั่วไปและยืดหยุ่นกว่าทฤษฎีบทเดิมที่มีอยู่ และมีความเกี่ยวข้องได้ ทั้งนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านการพิสูจน์การมีอยู่จริงของคำตอบว่ามีเงื่อนไขเพียงพอต่อการได้คำตอบหรือไม่ อาทิเช่น ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์ ปัญหาสมการเมทริกซ์ และปัญหาการหาคำตอบของระบบสมการไม่เชิงเส้น เป็นต้น

ข้อเสนอแนะ

ผลลัพธ์ที่ได้จากโครงการนี้นับได้ว่าเป็นองค์ความรู้ใหม่ทางทฤษฎีเกี่ยวกับการมีเงื่อนไขเพียงพอต่อการได้คำตอบหรือไม่ ซึ่งสามารถนำไปวิจัยต่อยอดในเรื่องการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น และระบบสมการไม่เชิงเส้น